UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales: ***Ing. Hortencia Caballero López***
Quim. María del Rosario Cabeza Luna

26 de abril de 2012 ***Semestre 2012-2***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Calcular el valor medio de la función $f(x) = |\tan x|$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

15 Puntos

---

2. Determinar si la siguiente integral converge o diverge.

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{3+e^{2x}}\,dx$$

15 Puntos

3. Efectuar las integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\left[(x+3)^2 + 9\right]^{3}}}$ b) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^3+2x^2-x-2}\,dx$

20 Puntos

---

4. Calcular la longitud de la curva de ecuación $y = \sqrt[3]{x^{2}}$ desde el punto **A(0, 0)** hasta el punto **B(1, 1) .**

15 Puntos

---

5. Para la función $f(r,\ p) = e^{\frac{1}{p}} \cos \boldsymbol{r}$ comprobar que se cumple la igualdad

$$\frac{\partial^2 f(r,\ p)}{\partial r\ \partial p} = \frac{\partial^2 f(r,\ p)}{\partial p\ \partial r}$$

15 Puntos

---

6. Sea la función expresada por $z = e^{2x} \cos 3y$, calcular su derivada direccional en el punto $\mathrm{A}\left(1,\ \frac{\pi}{3},\ -e^{2}\right)$ y en la dirección del vector $(1,\ 1,\ 1)$

20 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
SOLUCIÓN SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO

26 de abril de 2012 ***Semestre 2012-2***

---

5. Sea

$$|\tan x| = \begin{cases} \tan x & \text{si} \quad \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \\ -\tan x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{\pi/4}\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx = \frac{4}{\pi}\left[-\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4}$$

$$= -\frac{4}{\pi}\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\frac{4}{\pi}\left[\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) - \ln(\cos 0)\right]$$

$$= -\frac{4}{\pi}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln(1)\right] \to \boxed{f(c) = -\frac{4}{\pi}\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \qquad \boxed{f(c) = \frac{\ln 4}{\pi}}$$

15 Puntos

---

6. Reescribiendo la integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{3+e^{2x}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{e^x}{3+e^{2x}}\,dx$$

a) Indefinida

$$\int \frac{e^x}{3+e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^x}{\left(\sqrt{3}\right)^3 + \left(e^x\right)^2}\,dx$$

Haciendo cambio de variable:

$$a=\sqrt{3} \qquad u=e^{x}$$

$$du=e^{x}dx$$

$$=\int \frac{1}{a^{2}+u^{2}}du=\frac{1}{a}\operatorname{angtan}\left(\frac{u}{a}\right)+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{angtan}\left(\frac{e^{x}}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Se evalúa la integral:

$$\int_{0}^{t}\frac{e^{x}}{3+e^{2x}}dx=\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{angtan}\left(\frac{e^{x}}{\sqrt{3}}\right)+C\right]_{0}^{t}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{angtan}\left(\frac{e^{t}}{\sqrt{3}}\right)-\operatorname{angtan}\left(\frac{e^{0}}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

Aplicando límite:

$$L=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{angtan}\left(\frac{e^{t}}{\sqrt{3}}\right)-\operatorname{angtan}\left(\frac{e^{0}}{\sqrt{3}}\right)\right]\right\}=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{t\to\infty}\left[\operatorname{angtan}\left(\frac{e^{t}}{\sqrt{3}}\right)-\operatorname{angtan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$L=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{angtan}\left(\frac{e^{\infty}}{\sqrt{3}}\right)-\operatorname{angtan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{angtan}(\infty)-\operatorname{angtan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$L=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right]=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{2\pi}{6}\right]=\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{L=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{e^{x}}{3+e^{2x}}dx=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\text{Por lo tanto, la integral converge}}$$

15 Puntos

---

7. a) Haciendo cambio de variable

$$a^{2}=9 \qquad a=3$$

$$u^{2}=(x+3)^{2} \qquad u=x+3$$

$$du=dx$$

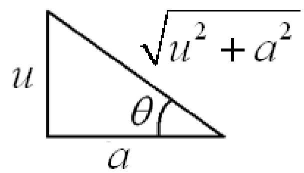
$$\rightarrow I=\int \frac{du}{\sqrt{\left[u^2+a^2\right]^3}}$$

Por sustitución trigonométrica

$$u=a\tan\theta=3\tan\theta$$

$$du=3\sec^2\theta d\theta$$

$$\sqrt{u^2+a^2}=a\sec\theta=3\sec\theta$$



Por lo tanto queda

$$\rightarrow I=\int \frac{3sec^2\theta d\theta}{\left[3sec\theta\right]^3}=\int \frac{3sec^2\theta}{27\,sec^3\theta}d\theta=\frac{1}{9}\int \frac{sec^2\theta}{sec^3\theta}d\theta=\frac{1}{9}\int \frac{d\theta}{sec\theta}$$

$$=\frac{1}{9}\int \cos\theta d\theta=\frac{1}{9}\text{sen }\theta+C$$

Deshaciendo la sustitución

$$I=\frac{1}{9}\frac{u}{\sqrt{u^2+a^2}}+C=\frac{1}{9}\frac{x+3}{\sqrt{(x+3)^2+9}}+C$$

10 Puntos

b) Por descomposición en fracciones parciales

$$I=\int \frac{x^2+2}{(x+2)(x+1)(x-1)}\,dx=\int\left[\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}\right]dx$$

Si:

$$\frac{x^2+2}{(x+2)(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$$

Entonces:

$$x^2+2=A(x+1)(x-1)+B(x+2)(x-1)+C(x+2)(x+1)$$

Si $x=-1$

$$3=B(-1+2)(-1-1)=B(1)(-2)=-2B \quad \rightarrow \quad \boxed{B=-\frac{3}{2}}$$

Si $x=-2$

$$6=A(-2+1)(-2-1)=A(-1)(-3)=3A \quad \rightarrow \quad \boxed{A=2}$$

Si $x=1$

$$3=C(1+2)(1+1)=C(3)(2)=6B \quad \rightarrow \quad \boxed{C=\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto

$$\int\left[\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}\right]dx=2\int\frac{1}{x+2}dx-\frac{3}{2}\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx=$$

$$\boxed{I=2\ln|x+2|-\frac{3}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C}$$

10 Puntos

---

8. La longitud de la curva está dada por

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}x^{2/3-3/3}=\frac{2}{3}x^{1/3} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{4}{9}x^{-2/3}$$

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\frac{4}{9}x^{-2/3}}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{4}{9x^{2/3}}}\,dx=\int_0^1\sqrt{\frac{9x^{2/3}}{9x^{2/3}}+\frac{4}{9x^{2/3}}}\,dx=$$

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\frac{4}{9}x^{-2/3}}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{4}{9x^{2/3}}}\,dx=\int_0^1\sqrt{\frac{9x^{2/3}}{9x^{2/3}}+\frac{4}{9x^{2/3}}}\,dx=$$

$$=\int_0^1\sqrt{\frac{9x^{2/3}+4}{9x^{2/3}}}\;dx=\int_0^1\frac{\sqrt{9x^{2/3}+4}}{\sqrt{9x^{2/3}}}\;dx=\int_0^1\frac{\sqrt{9x^{2/3}+4}}{\sqrt{9}\sqrt{x^{2/3}}}\;dx=$$

$$=\int_0^1\frac{\sqrt{9x^{2/3}+4}}{3x^{2/6}}\;dx=\int_0^1\frac{\sqrt{9x^{2/3}+4}}{3x^{1/3}}\;dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\sqrt{9x^{2/3}+4}}{x^{1/3}}\;dx$$

Haciendo cambio de variable

$$u=9x^{2/3}+4$$

$$du=9\left(\frac{2}{3}\right)x^{2/3-3/3}dx=6x^{-1/3}dx$$

$$L=\frac{1}{3}\int_4^{13}\frac{1}{6}u^{1/2}\;du=\frac{1}{18}\int_4^{13}u^{1/2}\;du=\frac{1}{18}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_4^{13}=\frac{2}{54}\left[\left(9x^{2/3}+4\right)^{3/2}\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{54}\left[13^{3/2}-4^{3/2}\right]=\frac{2}{54}\left[\sqrt{13^3}-\sqrt{4^3}\right]=\frac{1}{27}\left[13\sqrt{13}-8\right]$$

$$\boxed{L=\frac{1}{27}\left[13\sqrt{13}-8\right]}$$

15 puntos

---

9. Se obtiene el lado derecho de la igualdad

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial p}f(r,p)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial p}f(r,p)\right)\quad ;$$

$$\frac{\partial}{\partial p}f(r,p)=\frac{\partial}{\partial p}e^{1/p}\cos r=e^{1/p}\left(-\frac{1}{p^2}\right)\cos r$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{e^{1/p}}{p^2}\right)\cos r=\left(-\frac{e^{1/p}}{p^2}\right)(-\operatorname{sen} r)=\frac{e^{1/p}}{p^2}\operatorname{sen} r$$

Se obtiene el lado izquierdo de la igualdad

$$\frac{\partial^2}{\partial p \partial r} f(r,p) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial}{\partial r} f(r,p)\right) \quad ;$$

$$\frac{\partial}{\partial r} f(r,p) = \frac{\partial}{\partial r} e^{1/p}\cos r = e^{1/p}(-\text{sen } r)$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[e^{1/p}(-\text{sen } r)\right] = \left(-\frac{e^{1/p}}{p^2}\right)(-\text{sen } r) = \frac{e^{1/p}}{p^2}\text{sen } r$$

Sustituyendo en la ecuación original

$$\frac{\partial^2}{\partial r\, \partial p} f(r,\, p) = \frac{\partial^2}{\partial p\, \partial r} f(r,\, p)$$

$$\frac{e^{1/p}}{p^2}\text{sen } r = \frac{e^{1/p}}{p^2}\text{sen } r$$

Por lo tanto, se cumple la igualdad

15 puntos

---

10. La derivada direccional está expresada por

$$D_u\, F(x_0, y_0, z_0) = \overline{\nabla} F(x_0, y_0, z_0) \bullet \overline{u}$$

donde $\overline{\nabla} F(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\hat{k}$ y $\overline{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$\overline{\nabla} F(x_0, y_0, z_0)\Big|_A = \left(e^{2x}\, 2\cos 3y\ ,\ -3e^{2x}\text{sen } 3y\ ,\ -1\right) = \left(-2e^2, 0, -1\right)$$

Finalmente

$$D_u\, F\left(1, \frac{\pi}{3}, -e^2\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \bullet \left(-2e^2,\, 0,\, -1\right)$$

$$\boxed{D_u\, F(x_0, y_0, z_0) = -\frac{2e^2+1}{\sqrt{3}}}$$

20 Puntos