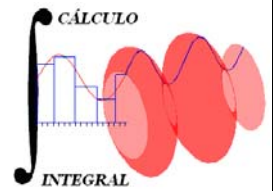




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS



CÁLCULO INTEGRAL
SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO

*Sinodales: M.I. Rocío Ávila Núñez
Ing. S. Carlos Crail Corzas*

25 de abril de 2011

Semestre 2011-2

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

1. Calcular el valor medio de la función $f(x) = 2 + (x + 1)^3$ en el intervalo $[-2, 0]$ y calcular el valor de c tal que cumpla con el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

15 Puntos

2. Calcular, si existe, el límite.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (4x) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2x} \right)$$

10 Puntos

3. Efectuar:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$

b) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}}$

c) $\int \frac{x}{x^2+x-2} dx$

30 Puntos

4. Calcular el área de la región limitada por la gráfica de las funciones $y = -x^2 + 8$ y $y = x^2$

10 Puntos

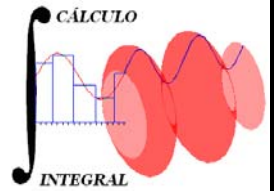
5. Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $z = -x^2 - y^2 + 9$ en el punto $(1, 1, 7)$

20 Puntos

6. Si $f(x, y) = 2y \operatorname{sen} x + 2x \operatorname{cos} y$ calcular:

$$\left. \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \right|_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}$$

15 Puntos



CÁLCULO INTEGRAL
SOLUCIÓN SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO

25 de abril de 2011

Semestre 2011-2

5. Sea

$$f(c) = \frac{\int_{-2}^0 [2 + (x+1)^3] dx}{0 - (-2)}$$
$$\Rightarrow f(c) = \frac{2x + \frac{(x+1)^4}{4} \Big|_{-2}^0}{2} = \frac{\frac{1}{4} - \left[-4 + \frac{1}{4}\right]}{2} = \frac{\frac{4}{4}}{2} = 2$$

si $f(c) = 2 + (c+1)^3$ y $\boxed{f(c) = 2}$

$$\Rightarrow 2 + (c+1)^3 = 2 \Rightarrow \boxed{c = -1}$$

15 Puntos

6.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\text{sen}\left(\frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{4x}} \right) = \frac{0}{0} \quad \text{al aplicar L'Hôpital}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{-\frac{1}{2x^2} \cos\left(\frac{1}{2x}\right)}{-\frac{1}{4x^2}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{-4}{-2} \cos\left(\frac{1}{2x}\right) \right] = \boxed{2}$$

10 Punto

7. a) Por partes

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= (x-1)^{-\frac{1}{2}} dx \\ du &= dx & v &= 2\sqrt{x-1} dx \\ I &= 2x\sqrt{x-1} - 2 \int \sqrt{x-1} dx \end{aligned}$$

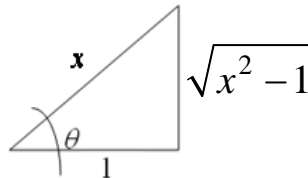
$$\boxed{I = 2x\sqrt{x-1} - \frac{4}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C}$$

b) Por sustitución trigonométrica

$$\text{si } x = \sec \theta \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \tan \theta$$

$$dx = \sec \theta \tan \theta d\theta$$



$$\Rightarrow I = \int \frac{\sec \theta \tan \theta d\theta}{\sec^2 \theta \tan \theta} = \int \frac{d\theta}{\sec \theta} = \int \cos \theta d\theta$$

$$\Rightarrow I = \text{sen} \theta + C = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C$$

$$\boxed{I = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + C}$$

c) Por fracciones parciales

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+2)} dx \text{ si } \frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\Rightarrow x = A(x+2) + B(x-1)$$

$$\text{si } x = -2 \qquad \text{si } x = 1$$

$$\Rightarrow -2 = -3B \qquad \Rightarrow 1 = 3A$$

$$\boxed{B = \frac{2}{3}}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{3}}$$

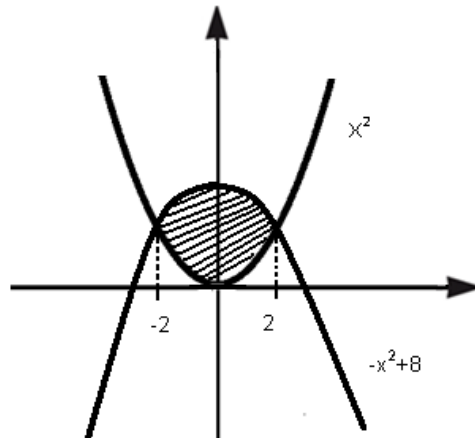
$$I = \int \frac{dx}{3(x-1)} + \int \frac{2}{3(x+2)} dx$$

$$I = \ln \sqrt[3]{x-1} + \ln \sqrt[3]{(x+2)^2} + C$$

$$\boxed{I = \ln \sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2} + C}$$

30 Puntos

8. Sea la gráfica



$$\text{si } -x^2 + 8 = x^2 \Rightarrow x_1 = -2$$

$$x_2 = 2$$

$$A = \int_{-2}^2 (-x^2 + 8 - x^2) dx$$

$$A = 2 \int_{-2}^0 (-2x^2 + 8) dx$$

$$A = 2 \int_0^2 (-2x^2 + 8) dx = 2 \left[-\frac{2}{3}x^3 + 8x \right]_0^2$$

$$A = 2 \left[-\frac{16}{3} + 16 \right] = -\frac{32}{3} + 32 = -\frac{32}{3} + \frac{96}{3}$$

$$A = \frac{64}{3} u^2$$

10 Puntos

7. Sea

$$F(x, y, z) = 0 \quad z + x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{(1,1,7)} = 2x = 2$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(1,1,7)} = 2y = 2 \quad \Rightarrow \quad \bar{\nabla} F = [2, 2, 1]$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{(1,1,7)} = 1$$

La ecuación del plano es

$$2(x-1) + 2(y-1) + (z-7) = 0$$

$$2x - 2 + 2y - 2 + z - 7 = 0$$

$$\boxed{2x + 2y + z - 11 = 0}$$

20 Puntos

8. Sea

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y \cos x + 2 \cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2 \cos x - 2 \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial^2 y \partial x} = -2 \cos x \quad \text{si} \quad y = \frac{\pi}{4}$$

$$\left. \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \right|_{y = \frac{\pi}{4}} = -2 \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{-\sqrt{2}}$$

15 Puntos