UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

CÁLCULO INTEGRAL

SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO

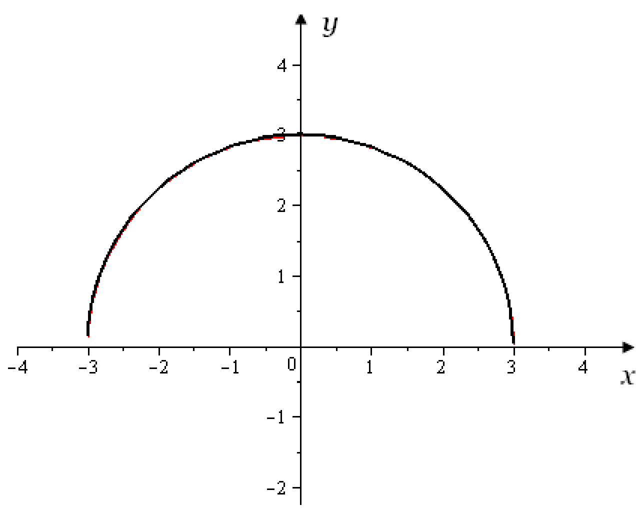
Sinodales: M.I. Mayverena Jurado Pineda
Fís. Pedro Ramírez Manny

25 de octubre de 2010 ***Semestre 2011-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2.5 horas**.

---

1. Determinar el valor medio de la función cuya gráfica es



en el intervalo $-3,3$.

15 puntos

---

2. Dterminar si la siguiente integral converge o diverge.

$$\int_0^{\infty} e^{e^x+x}\,dx$$

15 puntos

2EE11-1

3. Calcular, si existe:

$$\lim_{x \to 0} x^{senhx}$$

15 puntos

---

4. Efectuar

a) $\displaystyle\int \frac{x\,angsen\ \ x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}\,dx$ c) $\displaystyle\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$

30 puntos

---

5. Calcular la longitud de la curva dada por $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}sent$ en donde $t \in \left[0, ln\ \ 11\ \right]$

10 puntos

---

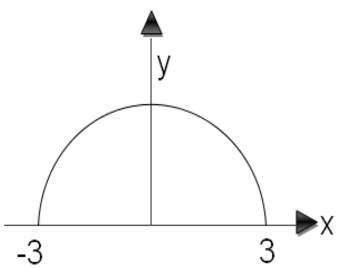
6. Calcular la derivada direccional de la función $f\ \ x,y,z\ \ = e^x + senhy + \ln z$ en el punto $0,0,1$ y en la dirección del vector localizado en el primer octante que forma un ángulo de $45°$ tanto con el eje X como con el eje Y, y un ángulo $90°$ con el eje Z.

15 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
CÁLCULO INTEGRAL

Solución del Segundo Examen Extraordinario
Semestre 2011 – 1

1. Determinar el valor medio de la función $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ en el intervalo $[-3,3]$.



$$f(c)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

$$f(c)=\frac{\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx}{3-(-3)}$$

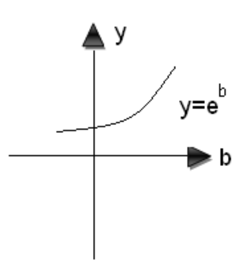
$$f(c)=\frac{\frac{\pi(3)^2}{2}}{6}=\frac{\frac{9}{2}\pi}{6}=\frac{9}{12}\pi$$

$$f(c)=\frac{3}{4}\pi$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Resultado}\\ f(c)=\frac{3}{4}\pi\end{array}}$$

15puntos

2. Calcular, de ser posible , la siguiente integral $\int_0^{\infty} e^{e^x+x}\,dx$



$$I = \int_0^{\infty} (e^{e^x + x})dx = \lim_{b\to -\infty} \int_0^{b} (e^{e^x + x})dx = \int (e^{e^x + x})dx$$

$$\int (e^{e^x} e^x)dx = \begin{pmatrix} u = e^x \\ du = e^x dx \end{pmatrix} = \int e^u du = e^{e^x} + C$$

$$I = \lim_{b\to\infty} e^{e^x} \Big]_0^b = \lim_{b\to\infty} e^{e^b} - e = DIVERGE$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Respuesta \\ \quad \text{La integral impropia diverge} \end{array}}$$

15 puntos

---

3. Calcular,

$$\lim_{x\to 0} x^{senhx} = 1^{\infty} \qquad y = x^{senhx} \qquad ln\, y = ln(x^{senhx})$$

$$\lim_{x\to 0} (ln\, y) = \lim_{x\to 0} (senhx)(ln\, x)$$

$$\lim_{x\to 0} (ln\, y) = \lim_{x\to 0} \frac{-senh^2 x}{x \cosh x}$$

$$\lim_{x\to 0} (ln\, y) = \lim_{x\to 0} \frac{-2 senhx \cosh x}{x senhx + \cosh x}$$

$$e^{ln\,(\lim_{x\to 0} y)} = e^0 \qquad \lim_{x\to 0} x^{senhx} = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ \lim_{x\to 0} x^{senhx} = 1 \end{array}}$$

15 puntos

4. Efectuar

$$a)\ \int \frac{x\, angsen\ \ x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = I$$

$$u = angsen(x) \qquad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad v = -\sqrt{1-x^2}$$

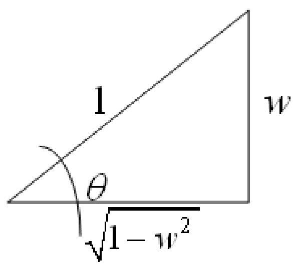
$$I = -\sqrt{1-x^2}angsen(x) + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\sqrt{1-x^2}angsen(x) + x + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Re}\,sultado \\ I = -\sqrt{1-x^2}angsen(x) + x + C \end{array}}$$

$$b)\ \int e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx = I$$

$$w = e^{x} \rightarrow dw = e^{x}dx$$

$$I = \int \sqrt{1-w^{2}}\,dw$$



$$sen\theta = w$$

$$\cos\theta = \sqrt{1-w^{2}}$$

$$\tan\theta = \frac{w}{\sqrt{1-w^{2}}}$$

$$dw = \cos\theta d\theta$$

$$I = \int \cos\theta\cos\theta d\theta = \int \cos^{2}\theta d\theta = \int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$I = \frac{\theta}{2}+\frac{sen2\theta}{4}+C = \frac{\theta}{2}+\frac{sen\theta\cos\theta}{2}+C$$

$$I = \frac{1}{2}angsen(e^{x})+\frac{e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}}{2}+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{Re}\,sultado\\ I = \frac{1}{2}angsen(e^{x})+\frac{e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}}{2}+C\end{array}}$$

$$c)\ \int \frac{x^3 - x + 3}{x^2 + x - 2}\, dx = \int \left(x - 1 + \frac{2x+1}{x^2+x-2} \right) dx = I$$

$$\begin{array}{r|l} & x - 1 \\ \hline x^2 + x - 2 & x^3 + x^2 - x + 3 \\ & -x^3 - x^2 + x \\ \hline & \quad - x^2 + x + 3 \\ & \quad\ \ x^2 + x - 2 \\ \hline & \quad\quad 2x + 1 \end{array}$$

$$I = \int x dx - \int dx + \int \underbrace{\frac{2x+1}{x^2+x-2}}_{I_1} dx$$

$$I_1 = \int \frac{2x+1}{x^2+x-2} dx = \int \frac{2x+1}{(x+2)(x+1)} dx = \int \left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \right) dx$$

$$\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \qquad 2x+1 = A(x-1) + B(x+2) \qquad A = 1, B = 1$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{dx}{x-1}$$

$$I = \int x dx - \int dx + \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{dx}{x-1}$$

$$I = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+2) + \ln(x-1) + C = \frac{x^2}{2} - x + \ln\left| x^2 + x - 2 \right| + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Re}\,sultado \\ I = \dfrac{x^2}{2} - x + \ln\left| x^2 + x - 2 \right| + C \end{array}}$$

30 puntos

5. Calcular la longitud de la curva dada por $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t} sent$ en donde $t \in \left[0,\ \ln\ 11\right]$

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t} sent - e^{-t}\cos t \qquad \frac{dy}{dt} = e^{-t}\cos t - e^{-t} sent$$

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}(sent + \cos t) \qquad \frac{dy}{dt} = e^{-t}(\cos t - sent)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = e^{-2t}(sent + \cos t)^2 + e^{-2t}(\cos t - sent)^2 = 2e^{-2t}$$

$$S = \int_0^{\ln 11} \sqrt{2e^{-2t}}\, dt = \sqrt{2}\int_0^{\ln 11} e^{-t} dt = -\sqrt{2}\, e^{-t}\Big]_0^{\ln 11|}$$

$$S = -\sqrt{2}\ (e^{-\ln 11} - 1) = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{11} - 1\right) = \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{11}\right) = \frac{10\sqrt{2}}{11}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{Re}\, sultado \\ S = \dfrac{10\sqrt{2}}{11}\, unidades\, de\, longitud\end{array}}$$

10 puntos

6. Calcular la derivada direccional de la función $f\left(x,y,z\right)=e^{x}+senh y+\ln z$ en el punto $\left(0,0,1\right)$ y en la dirección del vector localizado en el primer octante que forma un ángulo de $45°$ tanto con el eje X como con el eje Y, y un ángulo $90°$ con el eje Z.

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0}=\nabla f\,(x_0,y_0,z_0)\bullet\bar{u}$$

$$\nabla f=\left(e^{x},\cosh y,\frac{1}{z}\right)\qquad\qquad \nabla f\,(0,0,1)=\left(1,1,1\right)$$

$$\bar{u}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\cos 45°,\cos 45°,\cos 90°)$$

$$\bar{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0}=(1,1,1)\bullet\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{Re}\,sultado\\ \left(\dfrac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0}=\sqrt{2}\end{array}}$$

15 puntos