UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales: ***Ing. Luis Hernández Moreno***
Ing. Evelyn Salazar Guerrero

26 de abril de 2010 ***TIPO " A "*** ***Semestre 2010-2***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **7 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2.5 horas**.

---

1. Calcular el valor medio de la función $f(\theta) = ctg^2\theta \, sen^3\theta$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

15 puntos

---

2. Calcular, de ser posible

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 (\cosh x + senh x)}{senh\, x}$$

15 puntos

---

3. Efectuar

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ b) $\displaystyle\int x(\ln x)^2 \, dx$

24 puntos

4. Calcular la longitud de arco de la curva de ecuación $y = \dfrac{\sqrt{x^3}}{3}$ en el intervalo $\left[0 , 4 \right]$.

12 puntos

5. Calcular por medio de diferenciales, la cantidad de material que se necesita para fabricar un recipiente cilíndrico con tapa, cuyas dimensiones son: *8 cm* de diámetro, *10 cm* de altura y *1 mm* de espesor.

12 puntos

6. Obtener $\left. \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} \right|_{(\mathbf{e},\, \mathbf{e})}$ si $f\left(x , y \right) = \boldsymbol{\log_x y}$

10 puntos

7. Calcular el valor de la máxima variación de la función $f\left(x , y \right) = \dfrac{x^2}{y}$, en el punto $P_0 \left(2 , -2 \right)$.

12 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
CÁLCULO INTEGRAL

Solución del Segundo Examen Extraordinario
Semestre 2010 – 2

1.

$$f(\theta)=\frac{cos^2\theta}{sen^2\theta}sen^3\theta=cos^2\theta sen\,\theta$$

$\therefore$

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\theta)\,d\theta=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^2\theta sen\,\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega^2\,d\omega=-\frac{2}{\pi}\frac{(cos\,\theta)^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{2}{3\pi}\left(\left(cos\,\frac{\pi}{2}\right)^3-(cos\,0)^3\right)=-\frac{2}{3\pi}(0-1)=\frac{2}{3\pi}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ f(c)=\dfrac{2}{3\pi}\end{array}}$$

15 puntos

2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(cos\,h\,x+senh\,x)}{senh\,x}=\frac{0}{0}\quad L.\,Hôpital$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(senh\,x+cos\,h\,x)+2x(cos\,h\,x+senh\,x)}{cos\,h\,x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{0}{1}=0$$

$$\therefore \quad e^{(\ln y=0)} \qquad \therefore \quad y=1$$

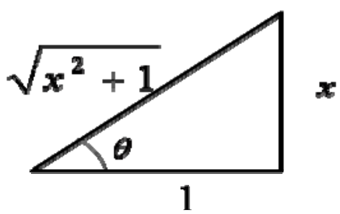
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\cosh x+\operatorname{senh} x)}{\operatorname{senh} x}=1$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Resultado}\\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\cosh x+\operatorname{senh} x)}{\operatorname{senh} x}=1\end{array}}$$

15 puntos

3.

a) Por sustitución trigonométrica



$$\begin{cases}\sqrt{x^2+1}=\sec\theta\\ x=\tan\theta\\ dx=\sec^2\theta\, d\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^4\theta}=\int\cos^2\theta\, d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2\theta)\, d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]+C$$

$$=\frac{1}{2}[\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\theta]+C$$

$$=\frac{1}{2}\left[\operatorname{ang}\tan\theta+\frac{x}{x^2+1}\right]+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Resultado}\\ \displaystyle I=\frac{1}{2}\left[\operatorname{ang}\tan\theta+\frac{x}{x^2+1}\right]+C\end{array}}$$

b)

$$u = (ln\ x)^2 \qquad du = 2(ln\ x)\frac{dx}{x}$$

$$dv = x\ dx \qquad v = \frac{1}{2}x^2$$

$$I = \frac{1}{2}x^2(ln\ x)^2 - \int x(ln\ x)dx$$

Aplicando otra vez el método en la integral resultante

$$u = ln\ x \qquad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = x\ dx \qquad v = \frac{1}{2}x^2$$

$$I = \frac{1}{2}x^2(ln\ x)^2 - \left[\frac{1}{2}x^2(ln\ x) - \frac{1}{2}\int x\ dx\right]$$

$$I = \frac{1}{2}x^2(ln\ x)^2 - \frac{1}{2}x^2(ln\ x) + \frac{1}{4}x^2 + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ I = \frac{1}{2}x^2(ln\ x)^2 - \frac{1}{2}x^2(ln\ x) + \frac{1}{4}x^2 + C \end{array}}$$

24 puntos

4.

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

$$y' = \frac{3}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$S = \int_0^4 \sqrt{1 + \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{x}{4}}\,dx = \int_0^4 u^{\frac{1}{2}}du$$

$$u = 1 + \frac{x}{4}$$

$$du = \frac{dx}{4}$$

$$= \frac{8}{3}\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{3}\left(\left(1+1\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1+0\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{8}{3}\left(\sqrt{2^3} - 1\right)$$

$$= \frac{8}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right) = \frac{16}{3}\sqrt{2} - \frac{8}{3} = \frac{16\sqrt{2} - 8}{3}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Respuesta \\ S = \dfrac{16\sqrt{2} - 8}{3} \end{array}}$$

12 puntos

---

5. Se tiene

$$V = \pi\, r^2 h \qquad ; r = 4\ , \Delta r = 0.1$$
$$h = 10\ , \Delta h = 0.2$$

De donde

$$dV = 2\pi\, r\, h\, dr + \pi r^2 dh$$

Con lo que, valuando

$$\begin{aligned} dV &= 2\pi(4)(10)(0.1) + \pi(4)^2(0.2) \\ &= 8\pi + 3.2\pi \\ &= 11.2\pi \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Respuesta \\ dV = 11.2\pi\ Unidades\ cúbicas \end{array}}$$

12 puntos

6.

Si $f\left(x,y\right)=log_x\, y$ entonces $f\left(x,y\right)=\dfrac{ln\ y}{ln\ x}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{x}\frac{ln\, y}{\left(ln\, x\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-\frac{1}{x\, y\left(ln\, x\right)^2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(e,e)}=-\frac{1}{e^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Re\,spuesta \\ \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(e,e)}=-\dfrac{1}{e^2} \end{array}}$$

14 puntos

7.

La derivada direccional máxima está dada por

$$\overline{\nabla}F=\left.\left(\frac{2x}{y},-\frac{x^2}{y^2}\right)\right|_{P_0}=\left(-2,-1\right)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dF}{ds}\right|_{máx}=\left|\overline{\nabla}F\right|=\sqrt{5}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Re\,spuesta \\ \overline{\nabla}F=\sqrt{5} \end{array}}$$

12 puntos