UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales: ***Fis. Pedro Ramírez Manny***
Ing. Evelyn Salazar Guerrero

30 de Octubre de 2009 ***TIPO " A "*** ***Semestre 2010-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2.5 horas**.

---

1. Determinar el valor medio de la función $f(x) = \left| x^2 - 9 \right|$ en el intervalo $[0, 4]$

12 puntos

---

2. Calcular de ser posible la siguiente integral

$$\int_5^6 \frac{ln(x-5)}{2x-10}\,dx$$

12 puntos

---

3. Efectuar

$a)$ $\displaystyle\int sen(ln\,x)\,dx$ $\qquad b)$ $\displaystyle\int \frac{(ln\,x)}{x\sqrt{(ln\,x)^2 - 16}}\,dx$ $\qquad c)$ $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$

36 puntos

4. Determinar la longitud de arco de la curva dada por sus ecuaciones paramétricas

$$x = \cosh t$$

$$y = t$$

en el intervalo $[0,1]$

12 puntos

---

5. Sea la función $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{\ln(xy)}}$

a) Determinar su dominio y representarlo gráficamente en el plano *xy*.

b) Graficar sus curvas de nivel para z=0 y z=1.

14 puntos

---

6. Determinar la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie definida por

$f(x,y) = x\,\mathrm{sen}\,y - y\,\mathrm{sen}\,x$ en el punto $P(\pi,\pi,0)$

14 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales:* *Fis. Pedro Ramírez Manny
Ing. Evelyn Salazar Guerrero

30 de Octubre de 2009 ***TIPO " B "*** ***Semestre 2010-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2.5 horas**.

---

1. Determinar el valor medio de la función $f(x)=\left|x^2-9\right|$ en el intervalo $[0,4]$

12 puntos

---

2. Calcular de ser posible la siguiente integral

$$\int_5^6 \frac{ln(x-5)}{2x-10}\,dx$$

12 puntos

---

3. Efectuar

$a)\ \int sen(ln\,x)\,dx$ $\qquad b)\ \int \frac{(ln\,x)}{x\sqrt{(ln\,x)^2-16}}\,dx$ $\qquad c)\ \int \frac{x^3}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$

36 puntos

4. Determinar la longitud de arco de la curva dada por sus ecuaciones paramétricas

$$x = cosh\ t$$

$$y = t$$

en el intervalo $[0,1]$

12 puntos

---

5. Sea la función $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{ln(xy)}}$

c) Determinar su dominio y representarlo gráficamente en el plano *xy*.

d) Graficar sus curvas de nivel para z=0 y z=1.

14 puntos

---

6. Determinar la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie definida por $f(x,y) = x\,sen\,y - y\,sen\,x$ en el punto $P(\pi,\pi,0)$

14 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
CÁLCULO INTEGRAL

Solución del Segundo Examen Extraordinario
Semestre 2010 – 1

1. $$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

$$f(c) = \frac{\int_0^4 \left|x^2-9\right|dx}{4-0} = \frac{1}{4}\int_0^4 \left|x^2-9\right|dx$$

$$\int_0^4 \left|x^2-9\right|dx = \int_0^3 -\left(x^2-9\right)dx + \int_3^4 \left(x^2-9\right)dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 9x\Big]_0^3 + \frac{x^3}{3} - 9x\Big]_3^4 =$$

$$= -9 + 9(3) + \frac{64}{3} - 36 - 9 + 27 =$$

$$= -54 + 54 + \frac{64}{3} = \frac{64}{3}$$

$$\int_0^4 \left|x^2-9\right|dx = \frac{64}{3}$$

$$f(c) = \frac{1}{4}\left(\frac{64}{3}\right) = \frac{16}{3}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ f(c) = \dfrac{16}{3} \end{array}}$$

12 puntos

2. En 5 tiene discontinuidad infinita $\therefore \int impropia$

$$\int_5^6 \frac{ln\,(x-5)}{2\,(x-5)}dx = \lim_{t\to 5^+}\frac{1}{2}\int_t^6 \frac{ln\,(x-5)}{2\,(x-5)}dx = \lim_{t\to 5^+}\frac{1}{2}\left(\left.\frac{(ln\,(x-5))^2}{2}\right|_t^6\right) =$$

$$u = ln\,(x-5)$$

$$du = \frac{1}{x-5}dx$$

$$\int u\;du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(ln\,(x-5))^2}{2} + C$$

$$= \lim_{t\to 5}\frac{1}{2}\left(\frac{(ln\,(6-5))^2}{2} - \frac{(ln\,(t-5))^2}{2}\right) = -\infty$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ \therefore\ la\ integral\ diverge \end{array}}$$

12 puntos

---

3. a)

$$I = \int sen\,(ln\;x)\,dx = \begin{bmatrix} u = sen\,(ln\;x) & du = cos\,(ln\;x)\frac{1}{x}dx \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x\;sen\,(ln\;x) - \int cos\,(ln\;x)\,dx = \begin{bmatrix} u = cos\,(ln\;x) & du = -sen\,(ln\;x)\frac{1}{x}dx \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x\;sen\,(ln\;x) - \left[x\;cos\,(ln\;x) - \int -sen\,(ln\;x)\,dx\right] =$$

$$= x\;sen\,(ln\;x) - x\;cos\,(ln\;x) - \int sen\,(ln\;x)\,dx$$

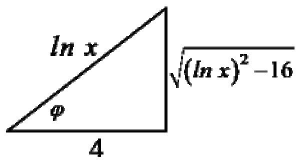
$$2I = x\;sen\,(ln\;x) - x\;cos\,(ln\;x) + C_1$$

$$I = \frac{1}{2}x\;sen\,(ln\;x) - \frac{1}{2}x\;cos\,(ln\;x) + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ I = \frac{1}{2}x\;sen\,(ln\;x) - \frac{1}{2}x\;cos\,(ln\;x) + C \end{array}}$$

b)

$$\int \frac{(ln\, x)^2}{x\sqrt{(ln\, x)^2-16}}\,dx=\left[\begin{array}{ll}\sqrt{(ln\, x)^2-16} & \rightarrow ln\, x=4\,sec\,\phi \\ & \frac{1}{x}dx=4\,sec\,\phi\, tan\,\phi\, d\phi\end{array}\right]$$



$$sec\,\phi=\frac{ln\, x}{4} \qquad tan\,\phi=\frac{\sqrt{(ln\, x)^2-16}}{4} \qquad 4\,tan\,\phi=\sqrt{(ln\, x)^2-16} \quad =$$

$$=\int \frac{16\,sec^2\phi}{4\,tan\,\phi}4\,sec\,\phi\,tan\,\phi\,d\phi=16\int sec^3\phi\,d\phi$$

$$\int sec^3\phi\,d\phi=\int sec^2\phi\,sec\,\phi\,d\phi=\begin{bmatrix}u=sec\,\phi & d\phi=sec\,\phi\,tan\,\phi\,d\phi \\ dv=sec^2\phi\,d\phi & v=tan\,\phi\end{bmatrix}=$$

$$=sec\,\phi\,tan\,\phi-\int sec\,\phi\,tan^2\phi\,d\phi=$$

$$=sec\,\phi\,tan\,\phi-\int sec\,\phi\left(sec^2\phi-1\right)d\phi=$$

$$=sec\,\phi\,tan\,\phi-\int sec^3\phi\,d\phi+\int sec\,\phi\,d\phi=$$

$$2\int sec^3\phi\,d\phi=sec\,\phi\,tan\,\phi+ln\left|sec\,\phi+tan\,\phi\right|+C_1$$

$$\int sec^3\phi\,d\phi=\frac{1}{2}sec\,\phi\,tan\,\phi+\frac{1}{2}ln\left|sec\,\phi+tan\,\phi\right|+C_2$$

$$\int \frac{(ln\, x)^2}{x\sqrt{(ln\, x)^2-16}}\,dx=16\int sec^3\phi\,d\phi=16\left[\frac{1}{2}sec\,\phi\,tan\,\phi+\frac{1}{2}ln\left|sec\,\phi+tan\,\phi\right|\right]+C_3$$

$$=8\,sec\,\phi\,tan\,\phi+8\,ln\left|sec\,\phi+tan\,\phi\right|+C_3$$

$$=8\frac{ln\, x}{4}\frac{\sqrt{(ln\, x)^2-16}}{4}+8\,ln\left|\frac{ln\, x}{4}+\frac{\sqrt{(ln\, x)^2-16}}{4}\right|+C_3$$

$$=\frac{1}{2}(ln\, x)\sqrt{(ln\, x)^2-16}+8\,ln\left|(ln\, x)+\sqrt{(ln\, x)^2-16}\right|+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l}Resultado \\ I=\frac{1}{2}(ln\, x)\sqrt{(ln\, x)^2-16}+8\,ln\left|(ln\, x)+\sqrt{(ln\, x)^2-16}\right|+C\end{array}}$$

c)

$$I=\int\frac{x^3}{(x+1)\left(x^2+1\right)}dx=\int\left[1-\frac{x^2+x+1}{(x+1)\left(x^2+1\right)}\right]dx=$$

$$x^3+x^2+x+1$$

$$\begin{array}{r|l} & \;1 \\ \hline x^3+x^2+x+1 & x^3 \\ & \underline{-x^3-x^2-x+1} \\ & \quad -x^2-x-1 \end{array}$$

$$=x-\int\frac{x^2+x+1}{(x+1)\left(x^2+1\right)}dx=x-\int\left[\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}\right]dx=$$

$$\left[\frac{x^2+x+1}{(x+1)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\right](x+1)\left(x^2+1\right)$$

$$x^2+x+1=A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)(x+1)$$

$$x=-1\,,\quad 1=2A\qquad A=\frac{1}{2}$$

$$x^2+x+1=Ax^2+A+Bx^2+Bx+Cx+C$$

$$x^2+x+1=(A+B)x^2+(B+C)x+(A+C)$$

$$A+B=1\,,\quad B+C=1\,,\quad A+C=1$$

$$\boxed{A=\frac{1}{2}}\,,\quad\boxed{B=\frac{1}{2}},\quad\boxed{C=\frac{1}{2}}$$

$$=x-\frac{1}{2}ln\left|x+1\right|-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=x-\frac{1}{2}ln\left|x+1\right|-\frac{1}{4}ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}ang\tan\,x+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l}Resultado\\ I=x-\frac{1}{2}ang\tan\,x-ln\left(\sqrt{x+1}\;\sqrt[4]{x^2+1}\right)+C\end{array}}$$

36 puntos

4.

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$L=\int_0^1\sqrt{(senh\ t)^2+(1)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{(cosh\ t)^2}\,dt=$$

$$=\int_0^1 cosh\ t\ dt=senh\ t\Big|_0^1=\left.\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right|_0^1=$$

$$=\frac{e-e^{-1}}{2}-\frac{1-1}{2}=\frac{e-e^{-1}}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}Respuesta\\ L=\dfrac{e-e^{-1}}{2}\end{array}}$$

12 puntos

---

5. a) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{ln(xy)}}$

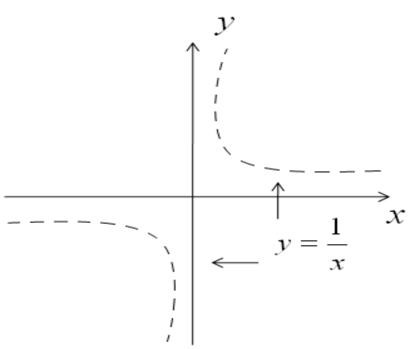
$ln(xy)>0 \quad\rightarrow\quad e^{ln(xy)}>e^0$

$xy>1$

Punto de prueba : $(2,2)$

$(2)(2)>1$

$D_f=\{(x,y)\,|\,xy>1;\,x,y\in\mathbb{R}\}$



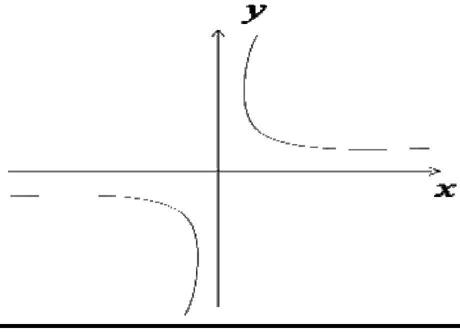
b) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{ln(xy)}}=0$ *No hay curva de nivel*

$f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{ln(xy)}}=1 \quad\rightarrow\quad 1=\sqrt{ln(xy)}$

$ln(xy)=1$

$xy=e$

Hipérbola equilátera



$$\boxed{\begin{array}{l}Respuesta\\ a)\,D_f=\{(x,y)\,|\,xy>1;\,x,y\in\mathbb{R}\}\\ b)\,xy=e\ ,\ Hipérbola\ equilátera\end{array}}$$

14 puntos

6.

$$z - x\,\mathrm{sen}\,y + y\,\mathrm{sen}\,x = 0$$
$$F = z - x\,\mathrm{sen}\,y + y\,\mathrm{sen}\,x$$
$$\nabla F = \left(-\mathrm{sen}\,y + y\cos x, -x\cos y + \mathrm{sen}\,x, 1\right)$$
$$\nabla F\,(\pi,\pi,0) = (-\pi,\pi,1)$$
$$\left(\overline{P} - \overline{P_0}\right)\bullet\overline{N} = 0$$
$$\left[(x,y,z) - (\pi,\pi,0)\right]\bullet(-\pi,\pi,0) = 0$$
$$(x-\pi, y-\pi, z)\bullet(-\pi,\pi,0) = 0$$
$$-\pi x + \pi y + z = 0$$
$$\pi x - \pi y - z = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Respuesta \\ \pi x - \pi y - z = 0 \end{array}}$$

14 puntos