UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO

TIPO "A"

27 de mayo de 2019 ***Semestre 2019-2***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

1. Determina si la serie es convergente o no, si lo es, calcula su suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n+1}}$$

15 puntos

2. Calcula el valor promedio de la función f en el intervalo $\left[-\frac{3}{4}, 0\right]$ y determina el valor de C, que pertenece a dicho intervalo, en donde se cumple el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

15 puntos

3. Efectúa las integrales:

$$a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} \qquad b)\ \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx \qquad c)\ \int \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx$$

30 puntos

4. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = ln\,x$ y el eje de las abscisas en el intervalo $[1, e]$.

Representa gráficamente la región.

10 puntos

---

5. Obtén el dominio y el recorrido de la función f .

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

Traza la gráfica de la función.

15 puntos

---

6. Si la rapidez con la que cambia la altura de un cilindro circular recto es de $12\ \frac{cm}{min}$, calcula con qué rapidez debe cambiar el radio de la base, de tal modo que su volumen permanezca constante, en el instante en el que su altura mide $6\ cm$ y su radio $4\ cm$.

15 puntos

1. Si la serie la reescribimos como:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

nos damos cuenta que es una serie geométrica:

$$r=\frac{1}{3} \quad a=\frac{4}{9} \quad \textit{convergente y su suma es:}$$

$$S=\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}}=\frac{3\cdot 4}{2\cdot 9}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

15 Puntos

2. Sea el valor promedio:

$$f(c)=\frac{\displaystyle\int_{-3/4}^{0}\frac{dx}{2\sqrt{1+x}}}{0-\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{\left[\sqrt{1+x}\right]_{-3/4}^{0}}{\frac{3}{4}}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

para el valor de c

$$f(c)=\frac{1}{2\sqrt{1+c}} \quad y \quad f(c)=\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{c=-\frac{7}{16}}$$

15 puntos

3. Solución

a) Por cambio de variable

$$u=\sqrt{x} \quad \Rightarrow u^2=x \quad \Rightarrow 2udu=dx$$

$$I=\int \frac{2udu}{u\left(u^2+1\right)}=2\int \frac{du}{u^2+1}=2ang\,tan\left(u\right)+C$$

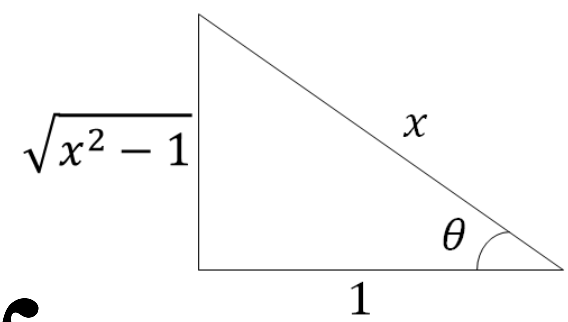
$$\boxed{I=2ang\,tan\left(\sqrt{x}\right)+C}$$

b) Por sustitución trigonométrica

$$x=sec\,\theta$$

$$\sqrt{x^2-1}=tan\,\theta$$

$$dx=sec\,\theta\cdot tan\,\theta\cdot d\theta$$



$$I=\int \frac{tan\,\theta\cdot sec\,\theta\cdot tan\,\theta}{sec\,\theta}d\theta=\int tan^2\theta d\theta$$

$$I=\int \left(sec^2\theta-1\right)d\theta=\int \left(sec^2\theta\right)d\theta-\int d\theta$$

$$I=tan\,\theta-\theta+C \quad \Rightarrow \boxed{I=\sqrt{x^2-1}-ang\,sec\left(x\right)+C}$$

c) Por descomposición en fracciones parciales

Sea $$\frac{1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}\ ;$$

$$1=Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2$$

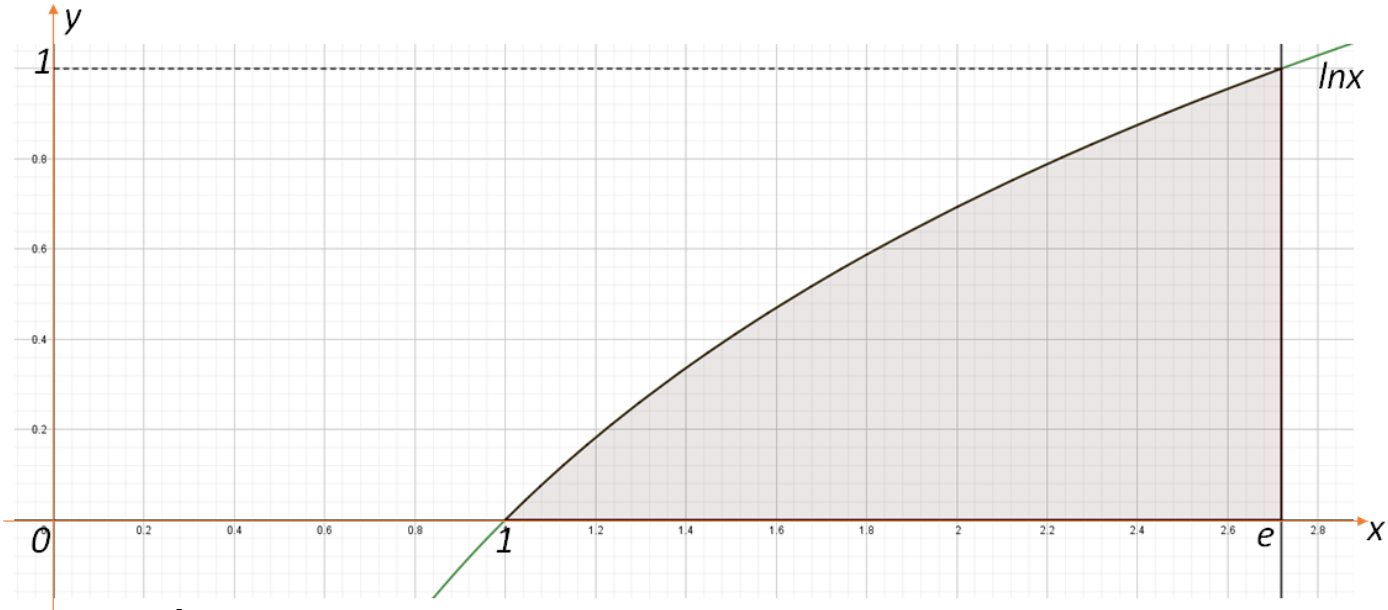
$$\Rightarrow\begin{cases} si\ \ x=0 \quad \Rightarrow \boxed{B=1} \\ si\ \ x=-1 \quad \Rightarrow \boxed{C=1} \\ si\ \ x=1 \Rightarrow 1=2A+2+1 \\ \qquad\qquad \Rightarrow \boxed{A=-1} \end{cases}$$

$$I=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$\Rightarrow \boxed{I=ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x}+C}$$

30 Puntos

4. La región es:

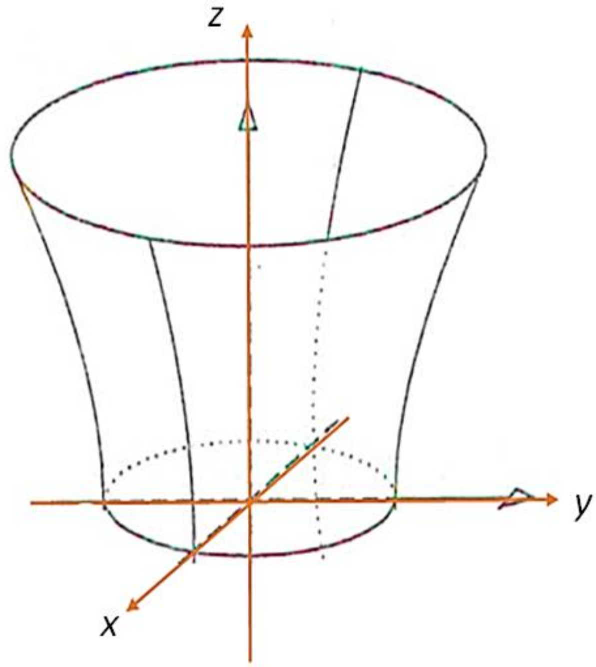


$$A=\int_1^e \left[\ln x\right]dx \quad Por\ partes \quad A=\left[x\ln x-x\right]_1^e=e\cdot 1-e-(0-1)=\boxed{1u^2}$$

10 Puntos

5. $\boxed{D_f=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\geq 1\right\}}$ $\boxed{R_f=\left\{z\,|\,z\geq 0\right\}}$

Hiperboloide circular de un manto:



15 Puntos

6.

Si:

$$v = \pi r^2 h \quad y \quad \frac{dr}{dt} = ?$$

$$\frac{dh}{dt} = 12\, {}^{cm}\!/\!_{min}; \quad \frac{dV}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt}$$

De donde:

$$r = 4cm \quad h = 6cm$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{-\dfrac{\partial V}{\partial h} \cdot \dfrac{dh}{dt}}{\dfrac{\partial V}{\partial r}}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\pi r^2 \cdot \dfrac{dh}{dt}}{2\pi r h} = -\frac{1}{2}\frac{r}{h}\frac{dh}{dt} = \boxed{-4\left[{}^{cm}\!/\!_{min}\right]}$$

15 Puntos