UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL
1221
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO
TIPO "C"

7 de junio de 2018 ***Semestre 2018-2***

*Nombre:*____ *No. Cta.:*___________

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Obtén la serie de Maclaurin de la función

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

15 puntos

---

2. Determina, si existe, el valor de:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^x$$

15 puntos

3. Efectúa:

$$a)\int sen\left(\sqrt{x}\right)dx \qquad b)\int \frac{2x-1}{x-x^3}dx \qquad c)\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

30 Puntos

4. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de las funciones. Haz la representación gráfica de la región.

$$y = x - 1 \qquad \text{y} \qquad y = -x^2 - 1$$

10 Puntos

5. Determina el dominio, el recorrido y representa gráficamente el dominio de la función. $f(x, y) = \ln(1 - x - y)$

15 Puntos

6. Para la función $f(x, y) = x\,sen\left(\frac{x}{y}\right)$, calcula el valor de

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right|_{(2,\,\pi)}$$

15 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO INTEGRAL

1221

Solución del Primer Examen Final

Tipo "C"

Semestre 2018 – 2

1. Sea:

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1-x)^3}$$

$$\vdots$$

$$f^n(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\Rightarrow f^n(0)=n!$$

al sustituir en la serie de Maclaurin:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n!}x^n\Rightarrow\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}x^n}$$

15 puntos

2.

$$Sea\quad y=\left(\frac{1}{x}\right)^x$$

$$\Rightarrow \ln(y)=x\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\ln(y)\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)=\frac{+\infty}{+\infty}$$

Al aplicar L´hôpital

$$\Rightarrow \ln\left[\lim_{x\to 0^+} y\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{\frac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}}\right] = \lim_{x\to 0^+}[x] = 0$$

$$\Rightarrow \ln\left[\lim_{x\to 0^+} y\right] = 0 \quad \Rightarrow e^{\ln\left[\lim\limits_{x\to 0^+} y\right]} = e^0$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x = 1}$$

15 Puntos

---

3. Solución

a) Por partes

$$Si \quad w = \sqrt{x} \Rightarrow \ w^2 = x \Rightarrow \ 2wdw = dx$$

$$I = \int sen(w)2wdw \left| \begin{matrix} u = 2w \\ du = 2dw \end{matrix} \right. \Rightarrow \left| \begin{matrix} dv = sen(w)dx \\ v = -cos(w) \end{matrix} \right.$$

$$I = -2wcos(w) + 2\int cos(w)dw$$

$$\Rightarrow \boxed{I = -2\sqrt{x}\,cos\left(\sqrt{x}\right) + 2sen\left(\sqrt{x}\right) + C}$$

b) Por descomposición en fracciones parciales

Sea $\dfrac{2x-1}{-x\left(x^2-1\right)}=\dfrac{1-2x}{x\left(x^2-1\right)}=\dfrac{1-2x}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$;

$$1-2x=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)\Rightarrow\begin{cases} si\ \ x=0 \ \ \Rightarrow \boxed{A=-1} \\ si\ \ x=1 \ \ \Rightarrow -1=2B \\ \qquad\qquad \boxed{B=-\dfrac{1}{2}} \\ si\ \ x=-1 \ \ \Rightarrow 3=2C \\ \qquad\qquad \boxed{C=\dfrac{3}{2}} \end{cases}$$

entonces la integral queda:

$$I=\int\left[\frac{-1}{x}-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{3}{2(x+1)}\right]dx=-ln(x)-\frac{1}{2}ln(x-1)+\frac{3}{2}ln(x+1)+C$$

$$\Rightarrow \boxed{I=ln\left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{x\sqrt{x-1}}\right)+C}$$

c) Inmediata después de completar trinomio cuadrado perfecto

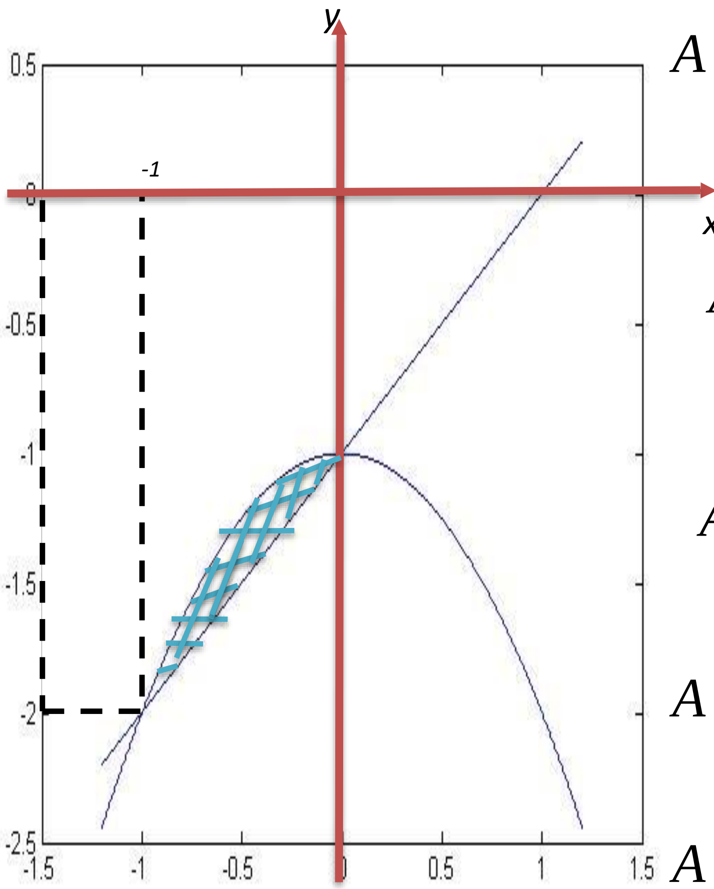
$$-\left(x^2-2x\right)=-\left(x^2-2x+1\right)+1=1-(x-1)^2$$

Por lo que:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=\boxed{angsen(x-1)+C}$$

30 Puntos

4. Sea la región:



$$A=\int_{-1}^{0}\left[\left(-x^2-1\right)-\left(x-1\right)\right]dx$$

$$A=\int_{-1}^{0}\left(-x^2-x\right)dx$$

$$A=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}$$

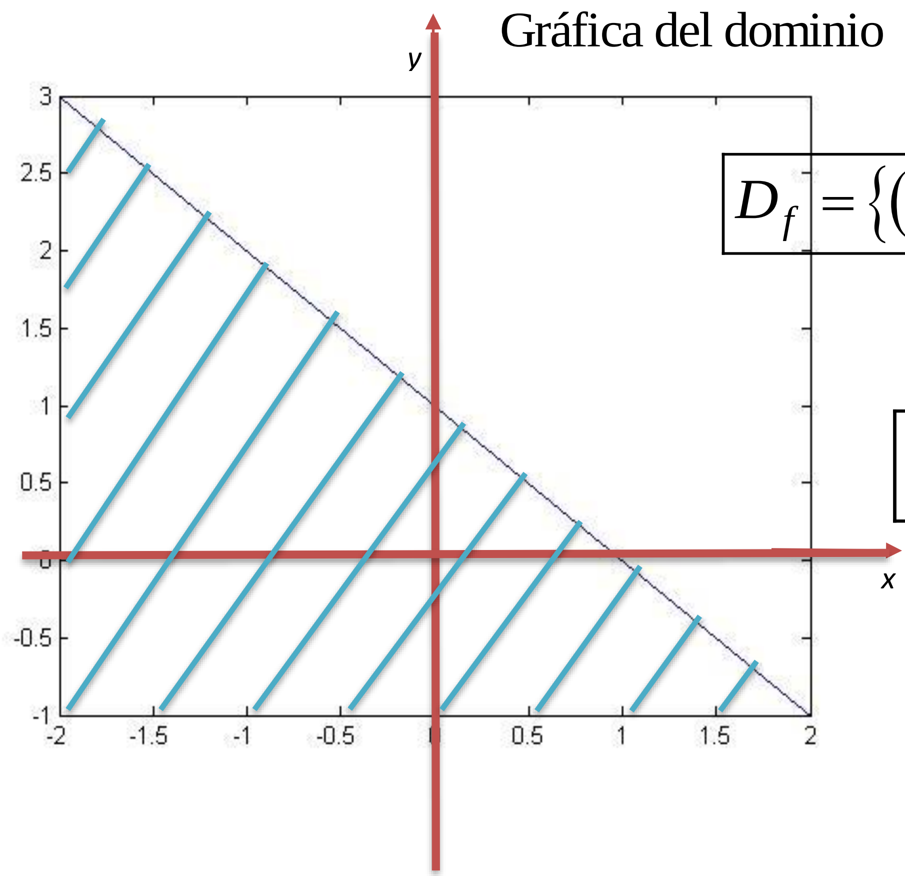
$$A=0-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$$

$$A=-\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{6}u^2}$$

10 Puntos

5.



$$\boxed{D_f = \{(x,y) \mid 1-x-y>0\}}$$

$$\boxed{R_f = \{z \mid z \in \mathbb{R}\}}$$

15 Puntos

6.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\left[-sen\left(\frac{x}{y}\right)\right]\frac{1}{y} + \cos\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{-2x}{y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{x^2}{y^3}\, sen\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{2x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\right|_{(\pi,\ 2)} = \frac{\pi^2}{8}\, sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2x}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\right|_{(\pi,\ 2)} = \frac{\pi^2}{8}}$$

15 Puntos