UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL
1221
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO
TIPO “A”

7 de junio de 2018 ***Semestre 2018-2***

Nombre:____ No. Cta.:____________

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

1. Determina el carácter de la siguiente serie. Si es convergente, calcula su suma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n}\, 3^{1-n}$$

15 puntos

2. Determina si la siguiente integral converge o diverge

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$$

15 puntos

3. Efectúa:

$a)\ \displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,dx \qquad b)\ \displaystyle\int x\, sen(x)\,dx \qquad c)\ \displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$

30 Puntos

4. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de las funciones. Haz la representación gráfica de la región.

$$f\left(x\right) = 2 - x^2 \qquad \text{y} \qquad g\left(x\right) = 1$$

10 Puntos

---

5. Obtén el dominio y el recorrido de la función *f*, y grafica el dominio.

$$f\left(x, y\right) = e^{-\sqrt{x+y}}$$

15 Puntos

---

6. Calcula la derivada direccional de la función $f\left(x, y\right) = 4 - x^2 - y^2$ en el punto $P\left(1, 1\right)$ y en la dirección del vector $\vec{u} = \left(-1, 1\right)$.

15 Puntos

1. La serie se puede reescribir como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

que es una serie geométrica convergente con: $a=2 \quad y \quad r=\frac{2}{3}$

por lo que su suma vale: $S=\dfrac{2}{1-\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{\frac{1}{3}}=\boxed{6}$

15 puntos

2. Si $u=\sqrt{x} \Rightarrow u^2=x \Rightarrow 2udu=dx$,

al sustituir la integral se convierte en:

$$I=\lim_{w\to\infty}\left(\int_1^w \frac{2udu}{2u\left(1+u^2\right)}\right)=\lim_{w\to\infty}\left(\int_1^w \frac{du}{1+u^2}\right)$$

$$I=\lim_{w\to\infty}\left[ang\tan(u)\right]_1^w=\lim_{w\to\infty}\left[ang\tan\left(\sqrt{x}\right)\right]_1^w$$

$$I=\lim_{w\to\infty}\left[ang\tan\left(\sqrt{w}\right)-ang\tan(1)\right]$$

$$I=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\boxed{\frac{\pi}{4}},$$ por lo que la integral converge

15 Puntos

3. Solución

a) Por descomposición en fracciones parciales

Sea $\dfrac{x+3}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}$;

$$x+3=A(x-2)+B(x-1)\Rightarrow\begin{cases} si \;\; x=1 \quad \Rightarrow 4=-A \\ \qquad\qquad\qquad \boxed{A=-4} \\ si \;\; x=2 \quad \Rightarrow \boxed{B=5} \end{cases}$$

entonces la integral queda:

$$I=\int\left[-\frac{4}{x-1}+\frac{5}{x-2}\right]dx$$

$$I=-ln(x-1)^4+ln(x-2)^5+C$$

$$\Rightarrow \boxed{I=ln\left(\frac{(x-2)^5}{(x-1)^4}\right)+C}$$

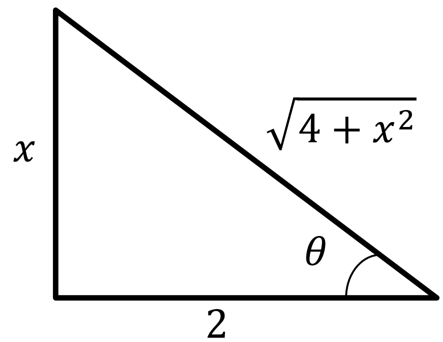
b) Por partes

$$\left|\begin{matrix} u=x \\ du=dx \end{matrix}\right. \Rightarrow \left|\begin{matrix} dv=sen(x)dx \\ v=-cos(x) \end{matrix}\right.$$

$$I=-x\,cos(x)+\int cos(x)dx$$

$$\Rightarrow \boxed{I=-x\,cos(x)+sen(x)+C}$$

c) Por sustitución trigonométrica



$$x = 2\tan\theta$$

$$x^2 = 4\tan^2\theta$$

$$\sqrt{4+x^2} = 2\sec\theta$$

$$dx = 2\sec^2\theta d\theta$$

Al sustituir en la integral:

$$I = \int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{4\tan^2\theta \cdot 2\sec\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta d\theta}{\tan^2\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos^2\theta d\theta}{\cos\theta \cdot sen^2\theta}$$

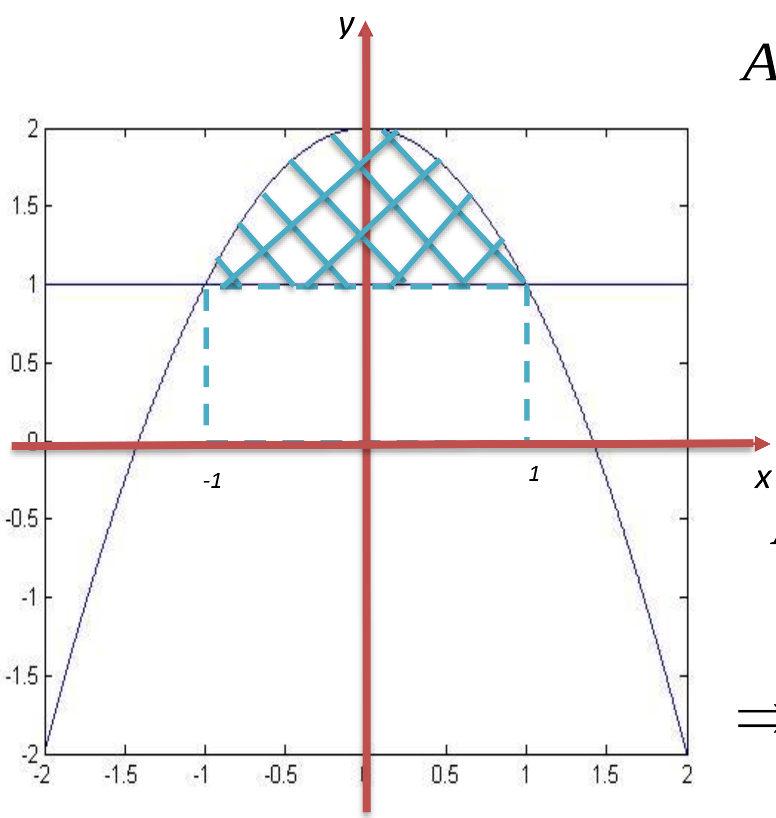
$$I = \frac{1}{4}\int sen^{-2}\theta(\cos\theta d\theta) = -\frac{1}{4}sen^{-1}\theta + C = -\frac{1}{4}\csc\theta + C$$

$$I = \boxed{-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{4+x^2}}{x} + C}$$

30 Puntos

---

4. Sea la región:



$$A = \int_{-1}^{1}\left[\left(2-x^2\right)-1\right]dx$$

$$A = 2\int_{0}^{1}\left(1-x^2\right)dx$$

$$A = 2\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{4}{3}u^2}$$

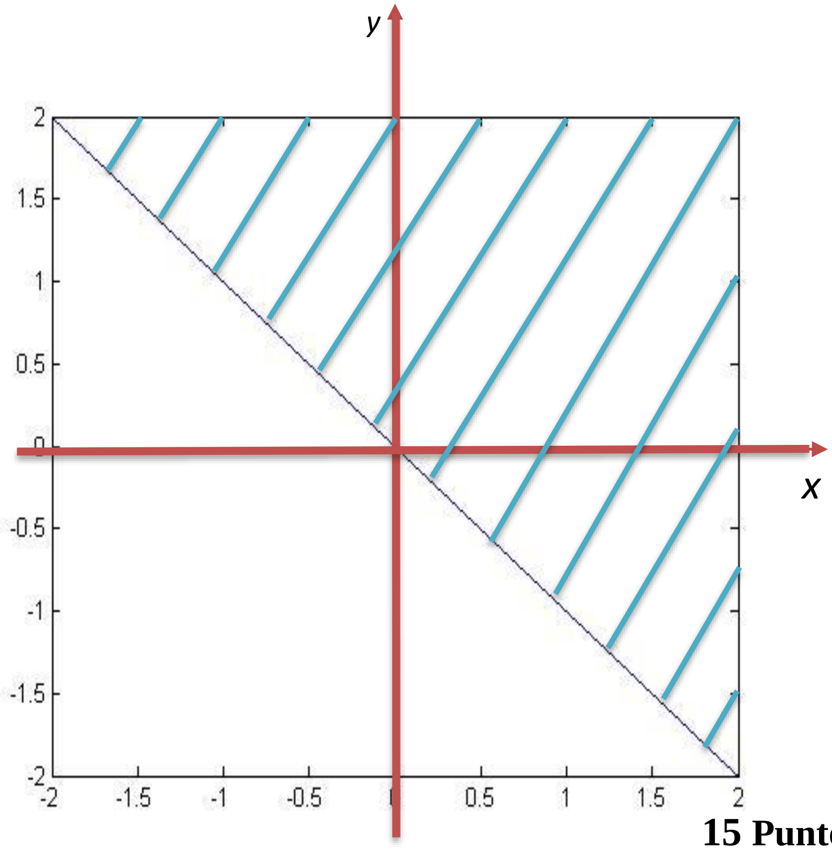
10 Puntos

5.

$$\boxed{D_f = \{(x,y) \mid x + y \geq 0\}}$$

$$\boxed{R_f = \{z \mid z \in (0,1]\}}$$

Gráfica del dominio



15 Puntos

6.

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \overline{\nabla} f \cdot \overline{w}$$

$$\text{Si} \quad \overline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} j = (-2x)\hat{i} + (-2y) j$$

$$\overline{\nabla} f\Big|_P = [-2,-2] \quad \text{y} \quad \overline{w} = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial s}\Big|_P = [-2,-2] \cdot \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{0}$$

15 Puntos