UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL
1221
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO

TIPO “C”

2 de diciembre de 2016 ***Semestre 2017-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los 6 **reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Determinar si la siguiente serie es convergente o divergente, si es convergente, calcular su suma

$$3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\ldots$$

15 puntos

---

2. Calcular, si existe, el límite:

$$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

10 puntos

3. Efectuar

$$a)\int x^2 e^x dx \qquad b)\int \frac{x^2}{x^2-4}dx \qquad c)\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$$

30 puntos

---

4. Calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor de eje de las ordenadas la región delimitada por las curvas.

$$y=\ln x, \quad y=0, \quad y=1, \quad x=0$$

Hacer la representación gráfica de la región.

10 puntos

---

5. Trazar la gráfica del dominio de la función f e identificar sus curvas de nivel para $z=0$ y $z=1$.

$$f(x,y)=\sqrt{xy-1}$$

20 Puntos

---

6. Calcular el valor de la derivada direccional de la función

$f(x,y)=x\cos y+y\,\text{sen}\,x$ en el punto $P\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ y en la dirección del vector $\bar{v}=i+j$.

15 puntos

1.

Si la serie se reescribre

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

por lo que se trata de una serie geométrica

donde $r=\frac{1}{2}$ y $a=3$

Por lo que es convergente y su suma es

$$S_n=\frac{3}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6$$

15 Puntos

2.

Si reescribimos

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{sen\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]=\frac{0}{0}$$

por lo que se puede aplicar la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-\frac{1}{x^2}cos\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\right]=\lim_{x\to\infty}cos\left(\frac{1}{x}\right)=cos(0)=1$$

10 Puntos

3.

a) Por partes

$u = x^2 \qquad dv = e^x\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = e^x$

$\Rightarrow I = x^2 e^x - 2\int xe^x\,dx$

nuevamente por partes

$u = x \qquad dv = e^x\,dx$

$du = dx \qquad v = e^x$

$\Rightarrow I = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$

$\Rightarrow \boxed{I = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C}$

nota: se puede aplicar integración tabular

b) Por fracciones parciales

$$I = \int \frac{x^2}{x^2-4}\,dx = \int\left(1+\frac{4}{x^2-4}\right)dx$$

Sea $\dfrac{4}{x^2-4} = \dfrac{2}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+2}$

$\Rightarrow 4 = A(x+2) + B(x-2)$

$si \quad x = 2$	$si \quad x = -2$
$\Rightarrow \; A = 1$	$\Rightarrow \; B = -1$

$$\Rightarrow I = \int\left(1+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \boxed{x + ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + C}$$

c) Por sustitución trigonométrica

Sea $\quad x = \sqrt{2}\, sec\,\theta$

$$\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{2}\ tan\,\theta$$

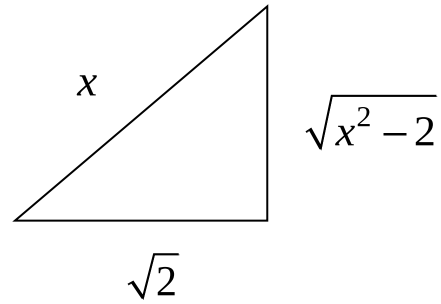
$$dx = \sqrt{2}\, sec\,\theta\, tan\,\theta\, d\theta$$

$$I = \int \frac{\sqrt{2}\, sec\,\theta\, tan\,\theta\, d\theta}{\sqrt{2}\, tan\,\theta} = \int sec\,\theta\, d\theta$$

$$I = ln\left(sec\,\theta + tan\,\theta\right) + C$$

$$I = ln\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}\right) + C =$$

$$\boxed{I = ln\left[x + \sqrt{x^2 - 2}\right] + C}$$



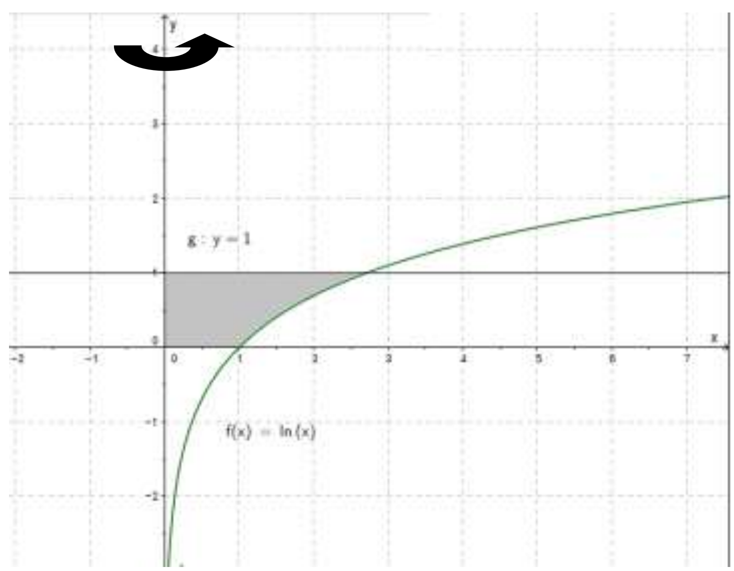
30 Puntos

4.

Sea la región

$$V = \pi \int_0^1 \left(e^y\right)^2 dy = \int_0^1 e^{2y} dy$$

$$V = \pi\, e^{2y}\Big]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{2}\left[e^2 - 1\right] u^3}$$

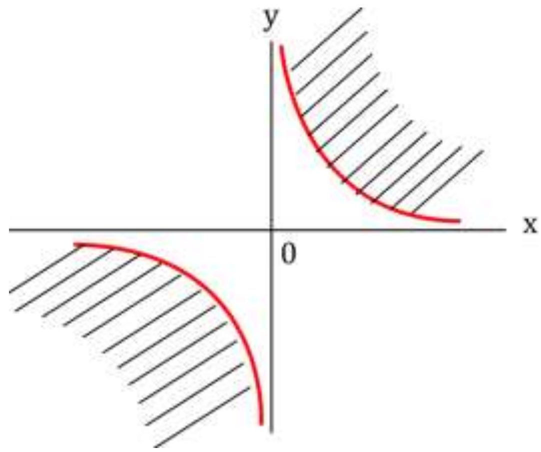


10 Puntos

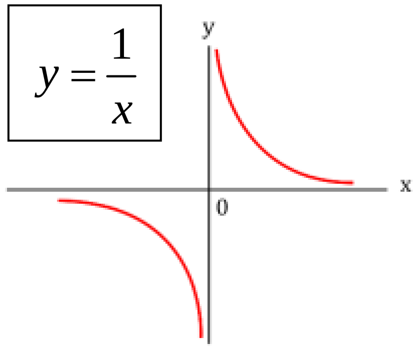
5.

Sea $D_f = \{(x,y) \mid xy - 1 \geq 0\}$

La gráfica del dominio es



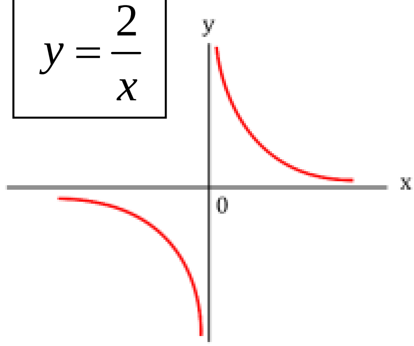
$\boxed{y = \dfrac{1}{x}}$



Si z=0 la curva de nivel es:

$\Leftarrow$

$\boxed{y = \dfrac{2}{x}}$



Si z=1 la curva de nivel es:

$\Leftarrow$

20 Puntos

6.

Sea $\overline{\nabla} f = (\cos y + y\cos x, -x\,sen\,y + sen\,x)$

$$\Rightarrow \overline{\nabla} f\Big|_p = \left(0, 1 - \frac{\pi}{2}\right) \quad y \qquad \bar{u}_v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{df}{ds} = \overline{\nabla} f \bullet \overline{u_v} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)$$

15 Puntos