UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO
TIPO "C"

24 de noviembre de 2014 ***Semestre 2015-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Por medio del límite de la suma de Riemann, calcular:

$$\int_{-2}^{0}\left(-\frac{1}{2}-x\right)dx$$

15 Puntos

---

2. Determinar si la siguiente integral converge o diverge.

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$$

15 Puntos

---

3. Efectuar las integrales

a) $\int x\ln x\,dx$ b) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$ c) $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$

30 Puntos

4. Calcular el área de la región limitada por las gráficas de

$$x^2 - 4y + 4 = 0 \qquad \text{y} \qquad x^2 + 4y - 12 = 0$$

10 Puntos

---

5. Calcular la derivada direccional de la función $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$ en el punto $P(1, 2)$ y en la dirección del vector $\bar{v} = (1, 3)$

15 Puntos

---

6. Si $f(x, y) = ln\left[sen(x - y)\right]$, calcular el número expresado por

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right|_{\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)}$$

15 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO INTEGRAL

Solución del Primer Examen Final Colegiado
Tipo "C"
Semestre 2015 – 1

1.

Construyamos una red sobre el intervalo con n celdas todas del mismo tamaño, por lo que la norma es:

$$\|\Delta x\| = \frac{0-(-2)}{n} = \frac{2}{n} = h$$

Sea $\theta_i = -2 + ih$ por lo que $f(\theta_i) = \frac{3}{2} - ih$

La suma de Riemann es:

$$S.\text{R} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{2} - ih\right)h = \frac{3}{2}hn - h^2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \text{ pero } h = \frac{2}{n}$$

$$S.R = 3 - 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S.R = \int_{-2}^{0}\left(-\frac{1}{2} - x\right)dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-2}^{0}\left(-\frac{1}{2} - x\right)dx = 3 - 2 = 1}$$

15 Puntos

2.

Es una integral impropia, por lo tanto:

$$I = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{0}\frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \lim_{u\to-\infty}\left[ang\tan e^x\right]_u^0$$

$$I = \lim_{u\to-\infty}\left[ang\tan(1) - ang\tan e^u\right] = \boxed{\frac{\pi}{4} \quad por\,lo\,que\,la\,Integral\,converge}$$

15 Puntos

3.

a) Por partes

$$u = \ln x \qquad du = x$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad u = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx$$

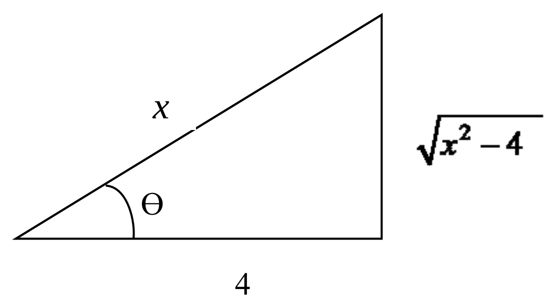
$$\boxed{I = x^2 \ln\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} + C}$$

b) Por sustitución trigonométrica

$$x = 2\sec\theta$$

$$\sqrt{x^2-4} = 2\tan\theta$$

$$dx = 2\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$



$$I = \int \frac{2\sec\theta\tan\theta}{4\sec^2\theta(2\tan\theta)}d\theta$$

$$I = \frac{1}{4}\int\frac{d\theta}{\sec\theta} = \frac{1}{4}\int\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{4}sen\theta + c$$

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{x^2-1}}{4x} + c}$$

c) Por fracciones parciales

Sea

$$\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1} \Rightarrow 1=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2$$

de donde:

$$\begin{array}{lll} si \quad x=0 & si \quad x=1 & si \quad x=2 \\ \Rightarrow \boxed{B=-1} & \Rightarrow \boxed{C=1} & 1=2A-1+4 \\ & & \Rightarrow \boxed{A=-1} \end{array}$$

$$I=\int\left[-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-1}\right]dx=-\ln x+\frac{1}{x}+\ln(x-1)+c$$

$$\boxed{I=\ln\left[\frac{x-1}{x}\right]+\frac{1}{x}+c}$$

30 Puntos

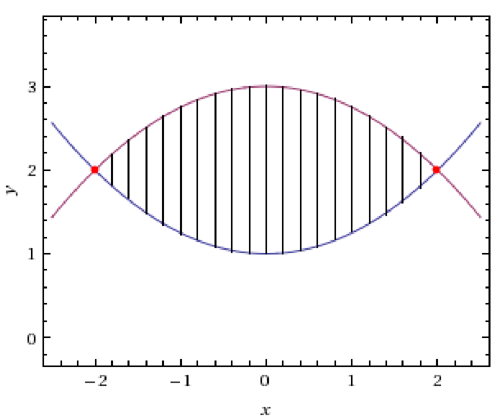
4. Sea la región

$$A=\int_{-2}^{2}\left[\left(-\frac{x^2}{4}+3\right)-\left(\frac{x^2}{4}+1\right)\right]dx=2\int_{0}^{2}\left(-\frac{x^2}{2}+2\right)dx$$

$$A=\int_{0}^{2}\left(-x^2+4\right)dx=-\frac{x^3}{3}+4x\Big]_0^2$$

$$A=\left[-\frac{8}{3}+8\right]=\frac{24}{3}-\frac{8}{3}$$

$$\boxed{A=\frac{16}{3}\ u^2}$$



10 Puntos

5.

Sea

$$\frac{df}{ds}=\overline{\nabla} f \bullet u_\theta=\left(\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}i+\frac{3}{\sqrt{10}}j\right)$$

$$\frac{df}{ds}=\left(2x+4y\right)\frac{1}{\sqrt{10}}+\left(2y+4x\right)\frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{en } (1,2)$$

$$\frac{df}{ds}=\left(2+8\right)\frac{1}{\sqrt{10}}+\left(4+4\right)\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{10}{\sqrt{10}}+\frac{24}{\sqrt{10}}=\frac{34}{\sqrt{10}}$$

$$\boxed{\frac{df}{ds}=\frac{34}{\sqrt{10}}}$$

15 Puntos

6.

Sea

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\cos(x-y)}{sen(x-y)}=\cot(x-y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=-\csc^2(x-y)(-1)=\csc^2(x-y)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)}=\csc^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\csc^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)}=2}$$

15 Puntos