UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO

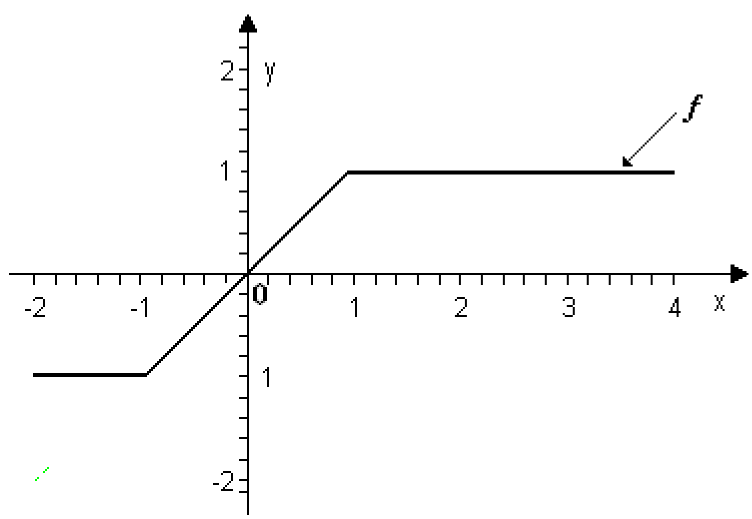
Sinodales: ***M.I. Mayverena Jurado Pineda***
Ing. Sergio Carlos Crail Corzas

23 de Septiembre de 2009 ***TIPO “ A ”*** ***Semestre 2010-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **7 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2.5 horas**.

---

1. Calcular el valor medio de la función f cuya gráfica se muestra abajo



10 puntos

---

2. Calcular

$$a)\ \int 4^{2x}\, e^{3x\ln 4}\,dx \qquad\qquad b)\ \lim_{x\to\infty} e^{-x}\left(\ln x^3\right)$$

15 puntos

3. Efectuar

$a)\ \int e^x \cos x\, dx$ $\qquad b)\ \int \frac{x}{\sqrt{(x-2)^2+3}}\, dx$ $\qquad c)\ \int \frac{x^2-1}{x^3+x}\, dx$

20 puntos

---

4. Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar alrededor del eje de las **ordenadas**, la región limitada por las curvas de ecuación $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = 2$.

15 puntos

---

5. Determinar el dominio de la función f y representarlo gráficamente, si

$$f(x, y) = \sqrt{\ln(2) - \ln(1 - 2y + x)}$$

10 puntos

---

6. Por efecto de la temperatura un cono se contrae pasando la longitud de su altura de 10cm a 9.7 cm y la de su radio de 5cm a 4.8cm. Calcular, de manera aproximada por medio de diferenciales, el incremento que sufre el volumen del cono.

15 puntos

---

7. Calcular la derivada direccional de la función $f(x, y) = \frac{1}{x\, y}$ en el punto $\left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$ y en la dirección del vector $v = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

15 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO

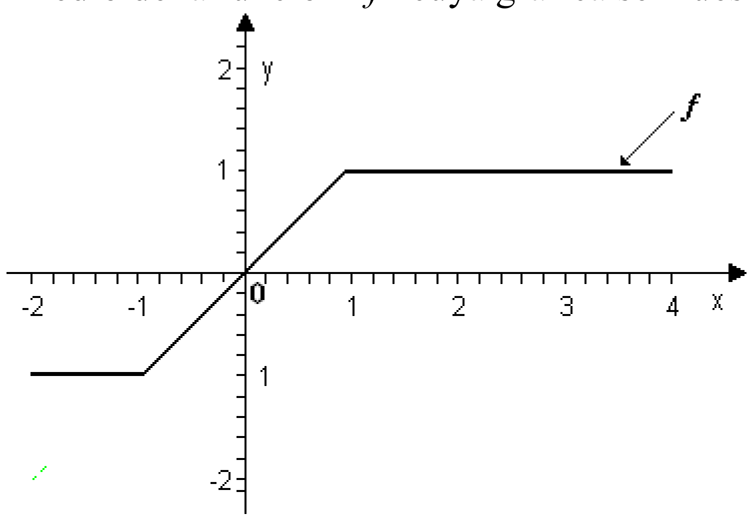
Sinodales: ***M.I. Mayverena Jurado Pineda***
Ing. Sergio Carlos Crail Corzas

23 de Septiembre de 2009 ***TIPO "B"*** ***Semestre 2010-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **7 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2.5 horas**.

---

1. Calcular el valor medio de la función f cuya gráfica se muestra abajo



10 puntos

---

2. Calcular

$$a)\ \int 4^{2x} e^{3x\ln 4}\,dx \qquad b)\ \lim_{x\to\infty} e^{-x}\left(\ln x^3\right)$$

15 puntos

3. Efectuar

$a)\ \displaystyle\int e^{x}\cos x\,dx \qquad b)\ \int \frac{x}{\sqrt{(x-2)^{2}+3}}\,dx \qquad c)\ \int \frac{x^{2}-1}{x^{3}+x}\,dx$

20 puntos

---

4. Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar alrededor del eje de las **ordenadas**, la región limitada por las curvas de ecuación $y=\ln x$, $y=0$ y $x=2$.

15 puntos

---

5. Determinar el dominio de la función f y representarlo gráficamente, si

$$f(x,y)=\sqrt{\ln(2)-\ln(1-2y+x)}$$

10 puntos

---

6. Por efecto de la temperatura un cono se contrae pasando la longitud de su altura de 10cm a 9.7cm y la de su radio de 5cm a 4.8cm. Calcular, de manera aproximada por medio de diferenciales, el incremento que sufre el volumen del cono.

15 puntos

---

7. Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y)=\dfrac{1}{x\,y}$ en el punto $\left(1,2,\dfrac{1}{2}\right)$ y en la dirección del vector $v=\left[\dfrac{1}{2}\ ,\ 1\right]$

15 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
CÁLCULO INTEGRAL

Solución del Primer Examen Extraordinario
Semestre 2010 – 1

1. El valor medio se calcula por medio de la expresión $f(c)=\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ de la interpretación geométrica se tiene que a partir de la figura

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = -\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$\therefore\ f(c)=\frac{2}{4-(-2)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Respuesta \\ f(c)=\dfrac{1}{3}\end{array}}$$

10 puntos

---

2. a) Por las propiedades de la función $ln\,x$ y e^x, la integral se puede escribir como

$$I=\int 4^{2x}\cdot e^{ln\,4^{3x}}\,dx=\int 4^{2x}\cdot 4^{3x}\,dx$$

$$I=\int 4^{5x}\,dx=\frac{1}{5}\int 4^{5x}(5dx)=\frac{4^{5x}}{5\,ln\,4}+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Respuesta \\ I=\dfrac{4^{5x}}{5\,ln\,4}+C\end{array}}$$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x^3}{e^x} = \dfrac{\infty}{\infty}$, se puede aplicar la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^3}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^3}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x e^x} = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x^3}{e^x} = 0 \end{array}}$$

15 puntos

---

3. a) Por partes

$$u = e^x \qquad dv = \cos x\, dx$$

$$du = e^x\, dx \quad v = \operatorname{sen} x$$

$$I = e^x \operatorname{sen} x - \underbrace{\int e^x \operatorname{sen} x\, dx}_{I_1}$$

I_1 a su vez por partes

$$u = e^x \qquad dv = \operatorname{sen} x\, dx$$

$$du = e^x\, dx \quad v = -\cos x$$

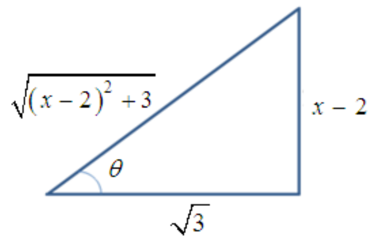
$$I = e^x \operatorname{sen} x - \left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx \right]$$

$$I = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \underbrace{\int e^x \cos x\, dx}_{I}$$

$$\Rightarrow 2I = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ I = \dfrac{e^x}{2}\left(\operatorname{sen} x + \cos x\right) + C \end{array}}$$

b) Por sustitución trigonométrica



$$x-2=\sqrt{3}\ tan\,\theta$$

$$\sqrt{(x-2)^2+3}=\sqrt{3}\ sec\,\theta$$

$$dx=\sqrt{3}\ sec^2\,\theta\ d\theta$$

$$\Rightarrow\ I=\int\left(\frac{\sqrt{3}\ tan\,\theta+2}{\sqrt{3}\ sec\,\theta}\right)\sqrt{3}\ sec^2\,\theta\ d\theta$$

$$I=\int\sqrt{3}\ sec\,\theta\ tan\,\theta\ d\theta+\int 2\ sec\,\theta\ d\theta$$

$$I=\sqrt{3}\ sec\,\theta+2\ ln\left|sec\,\theta+tan\,\theta\right|+C$$

$$I=\sqrt{3}\ \frac{\sqrt{(x-2)^2+3}}{\sqrt{3}}+2\ ln\left|\frac{\sqrt{(x-2)^2+3}}{\sqrt{3}}+\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right|+C$$

$$I=\sqrt{(x-2)^2+3}+2\ ln\left|\sqrt{(x-2)^2+3}+x-2\right|+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l}Resultado\\ I=\sqrt{(x-2)^2+3}+2\ ln\left|\sqrt{(x-2)^2+3}+x-2\right|+C\end{array}}$$

c) Por fracciones parciales

$$\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow\ x^2-1=A\left(x^2+1\right)+\left(Bx+C\right)x$$

$$si\quad x=0$$

$$\Rightarrow\ \boxed{A=-1}$$

$$si\quad x=1$$

$$\Rightarrow\ 0=-2+\left(B+C\right)\quad\Rightarrow\quad\boxed{B+C=2}\cdots(1)$$

$$si\quad x=-1$$

$$\Rightarrow\ 0=-(2)-\left(C-B\right)\quad\Rightarrow\quad\boxed{C-B=-2}\cdots(2)$$

$$si\ (1)+(2)$$

$$\Rightarrow 2C=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B=2}\ y\ \boxed{C=0}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-1}{x^3+x}=\frac{-1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2-1}{x^3+x}\,dx=\int\left(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{x}\right)dx=\int\frac{2x}{x^2+1}dx-\int\frac{dx}{x}$$

$$I=ln\left(x^2+1\right)-ln\ x+C=ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)+C$$

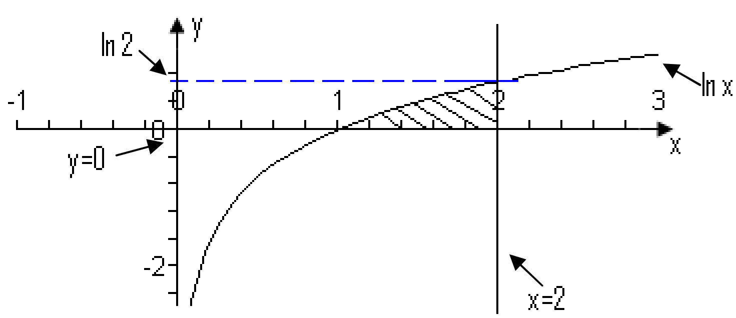
$$I=ln\left(x+\frac{1}{x}\right)+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ I=ln\left(x+\frac{1}{x}\right)+C \end{array}}$$

20 puntos

---

4. Sea la región indicada en la figura



$$\pi\int\left[2^2-e^{2y}\right]dy=V$$

$$V=\pi\left[4y-\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^{ln\ 2}$$

$$V=\pi\left[4\ ln\ 2-\frac{1}{2}e^{2\,ln\ 2}-\left(0-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$V=\pi\left[\ ln\ 2^4-\frac{1}{2}e^{ln\ 2^2}+\frac{1}{2}\right]$$

$$V=\pi\left[ln\frac{16}{4}+\frac{1}{2}\right]$$

$$V=\pi\left[ln\ 4+\frac{1}{2}\right]u^3$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ V=\pi\left[ln\ 4+\frac{1}{2}\right]u^3 \end{array}}$$

15 puntos

---

5. Debe cumplirse que

$$ln\ 2-ln\left(1-2y+x\right)\geq 0$$

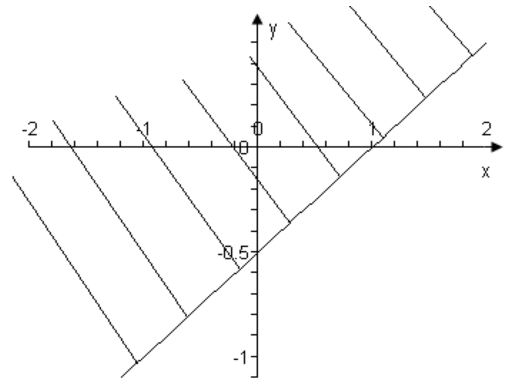
$$ln\left(1-2y+x\right)\leq ln\ 2$$

$$\Rightarrow 1-2y+x\leq 2$$

$$-2y+x\leq 1$$

$$x-1\leq 2y$$

$$y\geq\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$$



$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ y\geq\frac{x}{2}-\frac{1}{2} \end{array}}$$

10 puntos

6. Sea $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ si $dV = \Delta V$ entonces $dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh$ por lo que

$$dV = \frac{2}{3}\pi rh\ dr + \frac{\pi}{3}r^2 dh$$
$$dV = \frac{2}{3}\pi 10 \cdot 5\left(-\frac{2}{10}\right) + \frac{\pi}{3}5^2\left(-\frac{3}{10}\right)$$
$$dV = -\frac{20}{3}\pi - \frac{5}{2}\pi \quad \Rightarrow \quad dV = -\frac{55}{6}\pi\ cm^3$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ dV = -\frac{55}{6}\pi\ cm^3 \end{array}}$$

15 puntos

---

7. Sea $u_v = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ y sea $\overline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j$ entonces

$$\overline{\nabla} f\Big|_p = -\frac{1}{x}\Big|_p i - \frac{1}{y}\Big|_p j \text{ si } p\left(1,2,\frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow \overline{\nabla} f\Big|_{(1,2)} = -i - \frac{1}{2}j = \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$, la derivada direccional pedida es

$$\frac{df}{du} = \overline{\nabla} f \cdot u_v = \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right] = -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{-4-5}{4\sqrt{5}}$$
$$\frac{df}{du} = \frac{-9}{4\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{-9\sqrt{5}}{20}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ \frac{df}{du} = \frac{-9\sqrt{5}}{20} \end{array}}$$

15 puntos