UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO
1221

Sinodales: Ing. Luis Hernández Moreno
Ing. Sergio Carlos Crail Corzas

Alumno:*____** ***Semestre 2018-2

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

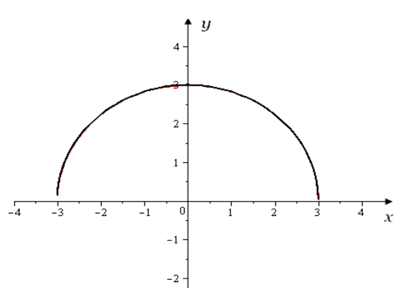
1. Determina el intervalo de convergencia de la serie expresado por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n}$$

Incluir el análisi de los extremos

20 puntos

2. Empleando la interpretación geométrica de la integral definida, determinar el valor medio de la función $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, cuya gráfica es



en el intervalo $[-3, 3]$.

10 puntos

3. Calcular el área de la región limitada por las curvas:

$$C_1: \; y = x^2 - 4 \;, \quad C_2: \; y = 0 \;, \quad C_1: \; x = 0 \quad y \quad C_1: \; x = 4$$

15 puntos

4. Efectuar

$$a) \int 4x\cos 2x \, dx \qquad\qquad b) \int \frac{x-1}{x^3 + x} \, dx$$

20 puntos

5. Obtener el recorrido de la función $f(x, y) = -\sqrt{16 - y^2}$, trazar su gráfica y representar gráficamente su dominio.

15 puntos

6. Calcular $\left.\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \, \partial x^2}\right|_{\left(0,\, \frac{\pi}{2}\right)}$ de $z = xe^{\cos y} - ye^{sen\, x}$

20 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO INTEGRAL

Solución del Primer Examen Extraordinario

Semestre 2018 – 2

1221

1. Sea la razón de D'Alembert.

$$r = \frac{\dfrac{(x+2)^{n+1}}{3^{n+1}}}{\dfrac{(x+2)^{n}}{3^{n}}} = \frac{3^{n}(x+2)^{n+1}}{3^{n+1}(x+2)^{n}} = \frac{1}{3}(x+2)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} r = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x+2}{3}\right) = \frac{x+2}{3} = \rho$$

Sea $|\rho|<1 \;\Rightarrow\; \left|\dfrac{x+2}{3}\right|<1,$ por lo que

$-1<\dfrac{x+2}{3}<1;\quad -3<x+2<3,$ de donde $-5<x<1$

$Si \quad x=-5$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n}}{3^{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n} \quad \textit{que es divergente}$$

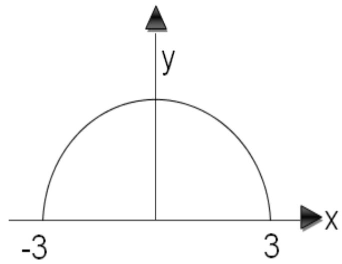
$Si \quad x=2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3)^{n}}{3^{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}1 \quad \textit{que es divergente}$$

$\boxed{\text{Por lo que el intervalo es } x \mid x\in(-5,1)}$

20 puntos

2. Determinar el valor medio de la función $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ en el intervalo $[-3,3]$.



$$f(c)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

$$f(c)=\frac{\int_{-3}^{3}\left(\sqrt{9-x^2}\right)dx}{3-(-3)}$$

$$f(c)=\frac{\frac{\pi(3)^2}{2}}{6}=\frac{\frac{9}{2}\pi}{6}=\frac{9}{12}\pi$$

$$f(c)=\frac{3}{4}\pi$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ f(c)=\frac{3}{4}\pi \end{array}}$$

10 puntos

3. Calcular el área de la región limitada por las curvas:

$C_1: \; y = x^2 - 4$, $C_2: \; y = 0$, $C_1: \; x = 0$ y $C_1: \; x = 4$

Se tiene:

$$A = -\int_0^2 (x^2 - 4)dx + \int_2^4 (x^2 - 4)dx$$

$$A = -\left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_2^4$$

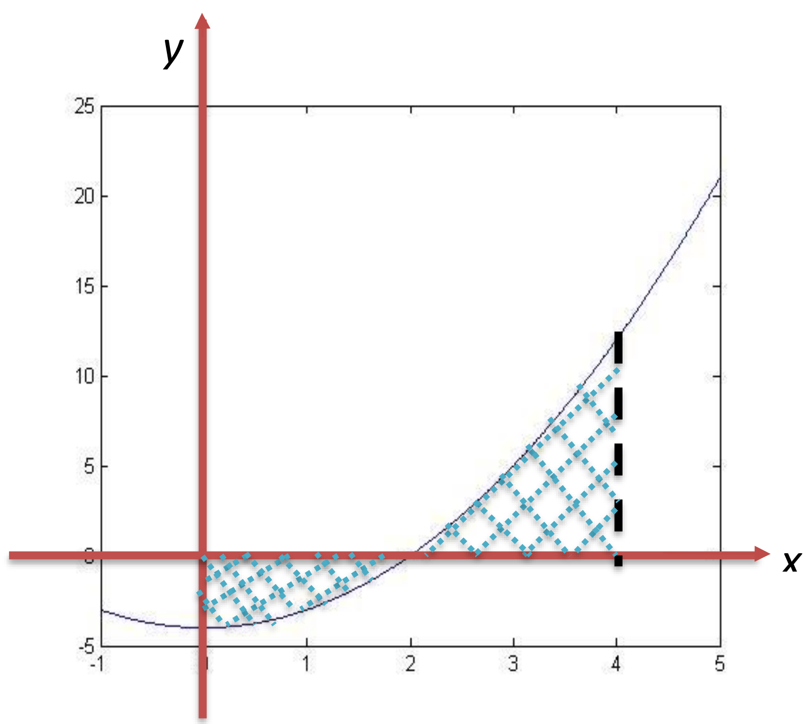
$$A = -\left(\frac{8}{3} - 8\right) + \frac{1}{3}(64 - 8) - 4(2)$$

$$A = \frac{16}{3} + \frac{56}{3} - 8$$

$$A = \frac{72}{3} - 8$$

$$A = 24 - 8$$

$$\boxed{A = 16\,u^2}$$



15 puntos

4. Efectuar

a) Por partes

$$\int 4x\cos 2x\,dx = I$$

$$\left| \begin{aligned} u &= 2x \\ du &= 2dx \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} dv &= 2\cos(2x)dx \\ v &= sen(2x) \end{aligned} \right.$$

$$I = 2x\left(sen(2x)\right) - \int sen(2x)(2dx)$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 2xsen(2x) - \cos(2x) + C}$$

b) Por descomposición en fracciones parciales

Sea $\dfrac{x-1}{x\left(x^2+1\right)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$;

$$x-1 = A\left(x^2+1\right) + Bx^2 + Cx \Rightarrow \begin{cases} si\ \ x=0;\ -1 = A(1) \Rightarrow \boxed{A=-1} \\ si\ \ x=i;\ i-1 = -B+Ci \\ \quad \Rightarrow \boxed{B=1, C=1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int \left[-\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right] dx$$

$$I = -lnx + \frac{1}{2}ln\left(x^2+1\right) + ang\tan x + C$$

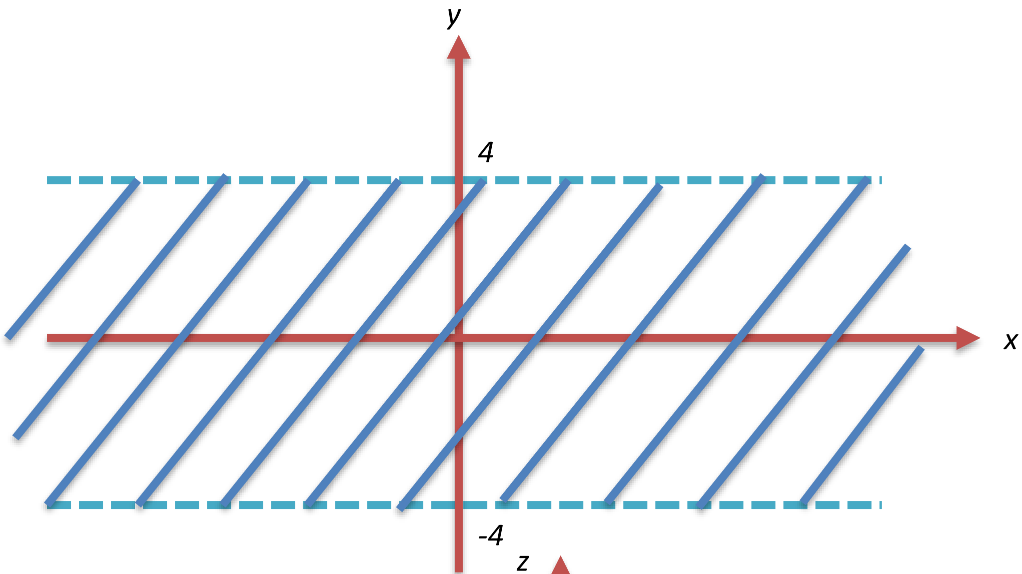
$$\Rightarrow \boxed{I = ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) + ang\tan x + C}$$

20 puntos

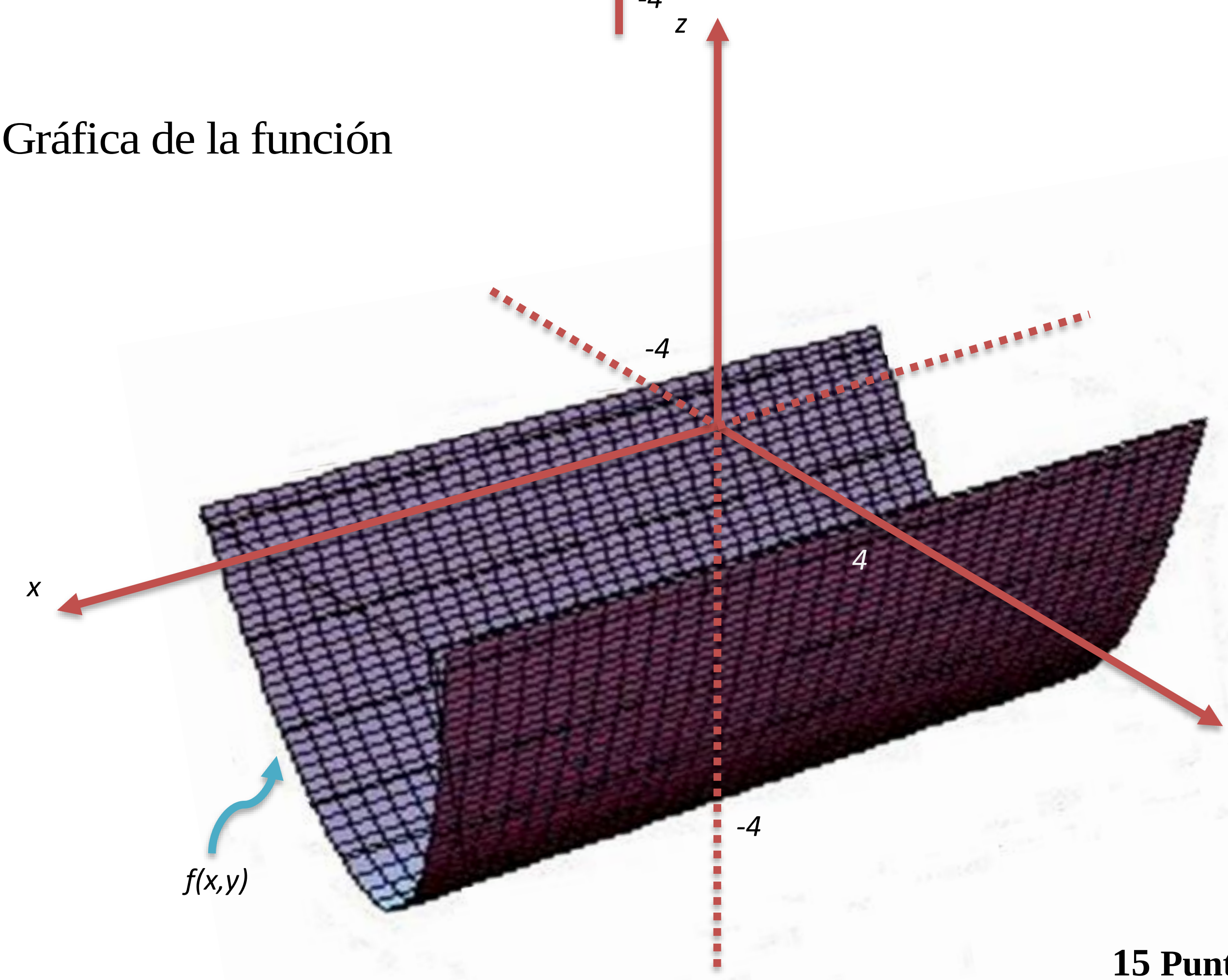
5. Obtener el recorrido de la función $f(x, y) = -\sqrt{16 - y^2}$, trazar su gráfica y representar gráficamente su dominio.

$$\boxed{R_z = \{z \mid z \in [-4, 0]\}}$$

Gráfica del dominio



Gráfica de la función



15 Puntos

6. Calcular $\left.\dfrac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x^2}\right|_{\left(0,\, \frac{\pi}{2}\right)}$ de $z = xe^{\cos y} - ye^{sen\, x}$

$$Si \quad z = xe^{\cos y} - ye^{sen\, x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = e^{\cos y} - y\cos x e^{sen\, x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y\cos^2 x e^{sen\, x} + y\, sen x e^{sen\, x}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x^2} = -\cos^2 x e^{sen\, x} + sen x e^{sen\, x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left.\frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x^2}\right|_{\left(0,\, \frac{\pi}{2}\right)} = -1}$$

20 puntos