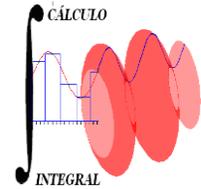




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS
CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO



*Sinodales: Ing. Sergio Carlos Crail Corzas
M.I. Mayverena Jurado Pineda*

25 de septiembre de 2015

Semestre 2016-1

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

1. Si el valor medio de la función f en el intervalo $[a, \pi]$ es 0 , entonces calcular el valor de a .

$$f(x) = -\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

15 Puntos

2. Calcular, si existe:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 2x)^{\frac{3}{x}}$$

15 Puntos

3. Efectuar las integrales:

$$a) \int 2x \operatorname{arctg} x \, dx \quad b) \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} \quad c) \int \frac{dx}{x^3 - x^2}$$

30 Puntos

4. Calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar alrededor del eje de las ordenadas a región limitada por las gráficas de:

$$y^2 - x - 1 = 0, \quad x = 0 \quad y \quad y = 0$$

10 Puntos

5. Obtener $\left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_{\substack{s=0 \\ t=1}}$, en donde

$$w(x, y) = y^3 - 3x^2y, \quad x = 4 - e^s \quad y = 5e^t$$

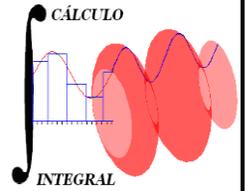
15 Puntos

6. La temperatura de una placa metálica en el punto (x, y) está dada por

$$T(x, y) = 400 e^{\frac{-(x^2+y)}{2}}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Determinar, a partir del punto $P(3, 5)$ la dirección en la cual aumenta más rápido la temperatura.

15 Puntos



Solución del Primer Examen Extraordinario
Semestre 2016 – 1

1. Sea

$$f(c) = \frac{\int_a^{\pi} \left[-\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right] dx}{\pi - a} = 0 ;$$

Sabiendo que $-\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, entonces

$$f(c) = \frac{\int_a^{\pi} \cos x dx}{\pi - a} = 0$$

$$\left[\operatorname{sen}(x) \right]_a^{\pi} = 0 ; \quad \operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} a = 0$$

$$a = \operatorname{angsen}(0) \quad \therefore \quad \boxed{a = 0}$$

15 Puntos

2. La sustitución directa da

$$L = (1)^{\infty}$$

$$\text{Sea } y = (e^x + 2x)^{\frac{3}{x}} \quad \text{entonces}$$

$$\ln y = \ln (e^x + 2x)^{\frac{3}{x}} \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3}{x} \ln (e^x + 2x) \right] = \frac{0}{0} \quad \text{Aplicando L'Hopital}$$

$$\ln \lim_{x \rightarrow 0} y = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2}{e^x + 2x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2}{e^x + 2x} = 9 \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 2x)^{\frac{3}{x}} = e^9 \quad \therefore \quad \boxed{L = e^9}$$

15 Puntos

3.

a) Por partes

$$I = \int 2x \operatorname{ang} \tan x \, dx$$

$$\text{si } u = \operatorname{ang} \tan x$$

$$dv = 2x \, dx$$

$$du = \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

$$v = x^2$$

$$I = x^2 \operatorname{ang} \tan x - \int \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$I = x^2 \operatorname{ang} \tan x - \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$I = x^2 \operatorname{ang} \tan x - x + \operatorname{ang} \tan x + C$$

$$\boxed{I = (x^2 + 1) \operatorname{ang} \tan x - x + C}$$

10 Puntos

b) Por sustitución trigonométrica

$$\text{si } x = \operatorname{sen} \theta$$

$$\sqrt{1 - x^2} = \operatorname{cos} \theta$$

$$dx = \operatorname{cos} \theta \, d\theta \quad \text{entonces}$$

$$\int \left(\frac{\operatorname{cos} \theta}{\operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta} \right) d\theta = \int \frac{d\theta}{\operatorname{sen} \theta} = \int \operatorname{csc} \theta \, d\theta$$

$$I = \ln |\operatorname{csc} \theta - \operatorname{cot} \theta| + C$$

$$I = \ln \left| \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \right| + C$$

$$\boxed{I = \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right| + C}$$

10 Puntos

c) Por fracciones parciales

$$\int \frac{dx}{x^3 - x^2} = \int \frac{dx}{x^2(x-1)}$$

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-1)}$$

$$1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$$

$$\text{si } x=0$$

$$B = -1$$

$$\text{si } x=1$$

$$C = 1$$

$$\text{si } x=2$$

$$A = -1$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x-1)} = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)} \right) dx$$

$$I = -\ln x - \frac{1}{x} + \ln(x-1) + c$$

$$I = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{x} + c$$

$$I = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} + c$$

10 Puntos

4. El volumen se puede calcular con:

$$V = \pi \int_0^1 (y^2 - 1)^2 dy$$

$$V = \pi \int_0^1 (y^2 - 1)^2 dy = \pi \int_0^1 (y^4 - 2y^2 + 1) dy$$

$$V = \pi \left(\frac{y^5}{5} - \frac{2}{3}y^3 + y \right)_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right)$$

$$V = \frac{8}{15} \pi u^3$$

10 Puntos

5. Se tiene que

$$w(x, y) = y^3 - 3x^2y, \quad x = 4 - e^s, \quad y = 5e^t$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -6xy \quad \frac{\partial x}{\partial s} = -e^s$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2 \quad \frac{\partial y}{\partial s} = 0$$

Para $s = 0, \quad t = 1$
 $x = 3, \quad y = 5e$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_{\substack{s=0 \\ t=1}} = 6xye^s = 6(3)(5e) = 90e \Rightarrow \boxed{\left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_{\substack{s=0 \\ t=1}} = 90e}$$

15 Puntos

6. Para obtener la dirección de máxima temperatura, se tiene

$$T(x, y) = 400e^{\frac{-(x^2+y)}{2}}$$

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} i + \frac{\partial T}{\partial y} j$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{P(3,5)} = 400(-x)e^{\frac{-(x^2+y)}{2}} = -1200e^{-7}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{P(3,5)} = 400\left(-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{-(x^2+y)}{2}} = -200e^{-7}$$

$$\nabla T(3,5) = (-1200e^{-7})i + (-200e^{-7})j$$

15 Puntos