UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales: ***Fís. Pedro Ramírez Manny***
Ing. Evelyn Salazar Guerrero

07 de marzo de 2011 ***Semestre 2011-2***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Mediante el límite de las sumas de Riemann, obtener

$$\int_1^3 \left(x^2+1\right)dx$$

15 Puntos

---

2. Determinar si la integral converge o diverge.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+x\right)}dx$$

15 Puntos

3. Efectuar las integrales

$$a)\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} \qquad b)\int \frac{dx}{4x^2+4x+1} \qquad c)\int \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$$

30 Puntos

4. Calcular el área de la región limitada por la curva de ecuación $r = 1 - sen\theta$ en donde (r,θ) son coordenadas polares.

15 Puntos

5. Sea $y^z + x^y + z^x = 0$ determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$

10 Puntos

6. Sea la función $f(x,y) = senhx + cosh\,y$ y el punto $P_0(ln2,0)$ perteneciente a su dominio.

a) Calcular la razón de cambio de la función en el punto P_0 y en la dirección de $\bar{a} = (-3,4)$.

b) Calcular la máxima variación de la función en el punto P_0.

15 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO INTEGRAL

Solución del Primer Examen Extraordinario
Semestre 2011 – 2

5. Mediante el límite de las sumas de Riemann, obtener $\int_1^3 \left(x^2+1\right)dx$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

$$\int_1^3 \left(x^2+1\right)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + i\frac{2}{n}\right)\frac{2}{n}$$

$$f(x) = x^2+1 \qquad\qquad f\left(1+i\frac{2}{n}\right) = \left(1+i\frac{2}{n}\right)^2 + 1 = 2 + \frac{4}{n}i + \frac{4}{n^2}i^2$$

$$\int_1^3 \left(x^2+1\right)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{4}{n}i + \frac{4}{n^2}i^2\right)\frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}(n) + \frac{8}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 4 + 4\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$= 4 + 4 + \frac{8}{3} = 8 + \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\boxed{\int_1^3 \left(x^2+1\right)dx = \frac{32}{3}}$$

15 Puntos

6.

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx+\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=$$

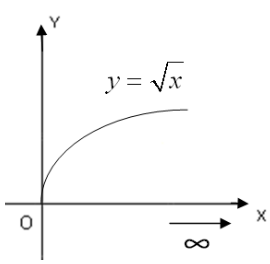
$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^{1}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx+\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=$$

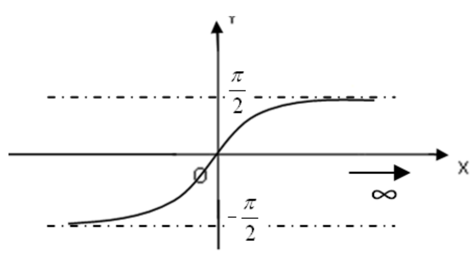
$$\left[2\int\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}dx=\begin{bmatrix}u=\sqrt{x}\\ du=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx\end{bmatrix}=2\int\frac{du}{1+u^2}=\right.$$

$$\left.=2ang\,tan\,u+C=2ang\,tan\sqrt{x}+C\right]$$

$$=\lim_{a\to 0^+}\left(2ang\,tan\sqrt{x}\right]\Big)_a^1+\lim_{b\to\infty}\left(2ang\,tan\sqrt{x}\right)\Big]_1^b$$

$$=\lim_{a\to 0^+}\left[2ang\,tan(1)-2ang\,tan\sqrt{a}\right]+\lim_{b\to\infty}\left[2ang\,tan\sqrt{b}-2ang\,tan(1)\right]$$





$$=2ang\,tan(1)+2\left(\frac{\pi}{2}\right)-2ang\,tan(1)=\pi$$

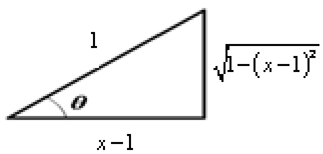
$$\boxed{\begin{array}{l}La\ integral\ impropia\ converge\\ y\ su\ valor\ es\ \pi\end{array}}$$

15 Puntos

7. Efectuar las integrales

$$a)\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \int \frac{-sen\theta}{sen\theta}d\theta = -\int d\theta = -\theta + C$$



$$sen\theta = \sqrt{1-(x-1)^2} \qquad x = \cos\theta + 1$$

$$\cos\theta = x-1 \qquad dx = -sen\theta d\theta$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = -ang\cos(x-1) + C}$$

10 Puntos

$$b)\int \frac{dx}{4x^2+4x+1}$$

$$4x^2+4x+1 = (2x+1)^2 \therefore$$

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w^2} = -\frac{1}{2w} + C = \boxed{-\frac{1}{2(2x+1)} + C}$$

$$w = 2x+1 \qquad dw = 2dx$$

10 Puntos

$$c)\int \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$$

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^2 x}\,dx=-\int we^w dw\,dx=-\left[we^w-\int e^w dw\right]=-we^w+e^w+C$$

Cambio de variable

$$w=\frac{1}{x} \qquad u=w \qquad dv=e^w dw$$

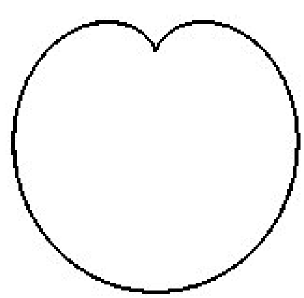
$$dw=-\frac{1}{x^2}dx \qquad du=dw \qquad v=e^w$$

$$\boxed{\int \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx=e^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right)+C}$$

10 Puntos

---

8. **Calcular el área de la región limitada por la curva de ecuación** $r=1-sen\theta$ **en donde** (r,θ) **son coordenadas polares.**



$$A=\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\left[f\left(\theta\right)\right]^{2}d\theta=2\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-sen\theta\right)^{2}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2sen\theta+sen^{2}\theta\right)d\theta$$

$$sen^{2}\theta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos\left(2\theta\right)$$

$$A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}-2sen\theta-\frac{1}{2}cos\,2\theta\right)d\theta=\frac{3}{2}\theta+2\cos\theta-\frac{1}{4}sen2\theta\bigg]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A=\frac{3}{4}\pi+\frac{3}{4}\pi=\frac{6}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$$

$$\boxed{A=\frac{3}{2}\pi\ unidades\,de\,área}$$

15 Puntos

---

7. Sea $y^{z}+x^{y}+z^{x}=0$ determinar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{yx^{y-1}+z^{x}\ln z}{y^{z}\ln y+xz^{x-1}}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yx^{y-1}+z^{x}\ln z}{y^{z}\ln y+xz^{x-1}}}$$

10 Puntos

8. Sea la función $f(x,y) = senhx + cosh\,y$ y el punto $P_0(ln2,0)$ perteneciente a su dominio.

c) Calcular la razón de cambio de la función en el punto P_0 y en la dirección de $\overline{a} = (-3,4)$.

d) Calcular la máxima variación de la función en el punto P_0.

$$a)\left(\frac{df}{ds}\right)_{\overline{u},P_0} = \nabla f(x_0, y_0) \bullet \overline{u} \qquad \overline{u} = \frac{\overline{a}}{\|\overline{a}\|} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\overline{u},P_0} = \nabla f(ln\,2, 0) \bullet \overline{u} \qquad \|\overline{a}\| = 5$$

$$\nabla f = (cosh\,x, senhy) \qquad cosh\,x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\nabla f(ln\,2, 0) = \left(\frac{5}{4}, 0\right) \qquad cosh(ln\,2) = \frac{e^{ln\,2} + e^{-ln\,2}}{2}$$

$$= \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\overline{u},P_0} = \left(\frac{5}{4}, 0\right) \bullet \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\boxed{\left(\frac{df}{ds}\right)_{\overline{u},P_0} = -\frac{3}{4}}$$

$$b)\left.\left(\frac{df}{ds}\right)_{P_0}\right|_{máx} = \|\nabla f(ln\,2, 0)\| = \boxed{\frac{5}{4}}$$

15 Puntos