UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales: ***M.I. María del Rocío Ávila Núñez***
Ing. Sergio Carlos Crail Corzas

13 de Septiembre de 2010 ***TIPO " A "*** ***Semestre 2011-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **7 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2.5 horas**.

---

1. Calcular el valor medio de la función $f\left(x\right)=2-\sqrt[3]{x-1}$ para el intervalo $\left[0\ ,2\right]$, y calcular el o los valores de c que hacen que se cumpla el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

Puntos 12

---

2. Determinar si la integral converge o diverge

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{4}{1+x^{2}}dx$$

Puntos 14

3. Efectuar las integrales

$a)\ \int x \ln x \, dx \qquad b)\ \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \qquad c)\ \int \frac{x^2}{x^3 - x}\, dx$

Puntos 24

---

4. Calcular la longitud de arco de la gráfica de la función $g(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ en el intervalo $[0,3]$.

Puntos 12

---

5. Identificar las curvas de nivel de la función $f(x,y) = -\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ y representarlas gráficamente.

Puntos 10

---

6. Por efecto de la temperatura un cilindro metálico se contrae, pasando la longitud de su radio de 10 a 9.8 cm y la longitud de su altura de 15 a 14.5 cm. Calcular, por medio de diferenciales, el cambio en el volumen del cilindro.

Puntos 13

---

7. Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y) = x e^{xy}$, en el punto $(1, \ln 2)$ y en la dirección del vector $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Puntos 15

1. El valor medio es

$$f(c)=\frac{\displaystyle\int_0^2\left(2-\sqrt[3]{x-1}\right)dx}{2-0}$$

$$f(c)=\frac{2x-\frac{3}{4}(x-1)^{4/3}\Big]_0^2}{2}$$

$$f(c)=\frac{4-\cancel{3/4}-\left(0-\cancel{3/4}\right)}{2}=\frac{4}{2}$$

$$f(c)=2 \qquad Si \qquad f(c)=2-\sqrt[3]{c-1}$$

$$\Rightarrow \quad 2=2-\sqrt[3]{c-1}$$

$$\Rightarrow \quad c=1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ c=1 \end{array}}$$

12 puntos

2. Es una integral impropia

$$I=\lim_{u\to-\infty}\int_u^{-1}\frac{4}{1+x^2}dx=\lim_{u\to-\infty}\left[4\,ang\tan x\right]_u^{-1}$$

$$I=\lim_{u\to-\infty}\left[4\,ang\tan(-1)-4\,ang\tan u\right]=\lim_{u\to-\infty}\left[4\left(-\frac{\pi}{4}\right)-4\,ang\tan u\right]$$

$$I=-\pi-4\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi+2\pi=\pi$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Respuesta \\ I=\pi\ Converge \end{array}}$$

14 puntos

3. a) Por partes

$$Si \qquad u = ln\ x \qquad dv = x$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow\ I = \frac{x^2}{2} ln\ x - \int \frac{x}{2} dx$$

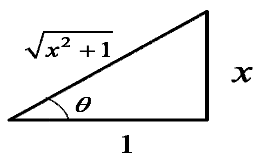
$$I = x^2\ ln\ \sqrt{x} - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ I = x^2 \left[ln\ \sqrt{x} - \dfrac{1}{4} \right] + C \end{array}}$$

b) Por sustitución trigonométrica

$$x = tan\ \theta$$

$$\sqrt{1 + x^2} = sec\ \theta$$



$$I = \int \frac{sec^2\ \theta}{sec\ \theta} d\theta = \int sec\ \theta\ d\theta$$

$$dx = sec^2\ \theta\ d\theta$$

$$\Rightarrow\ I = ln\left| sec\ \theta + tan\ \theta \right| + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ I = ln\left| x + \sqrt{1 + x^2} \right| + C \end{array}}$$

c) Integral inmediata

$$I = \int \frac{x^2}{x\left(x^2 - 1\right)} dx = \int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$$

$$\Rightarrow\ I = \frac{1}{2} ln\left(x^2 - 1\right) + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ I = ln\ \sqrt{x^2 - 1} + C \end{array}}$$

24 puntos

4.

$$Si \quad f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \left[f'(x) \right]^2 = x$$

$$\therefore S = \int_0^3 \sqrt{1+x}\, dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} \Big]_0^3$$

$$S = \frac{2 \bullet 8}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}u$$

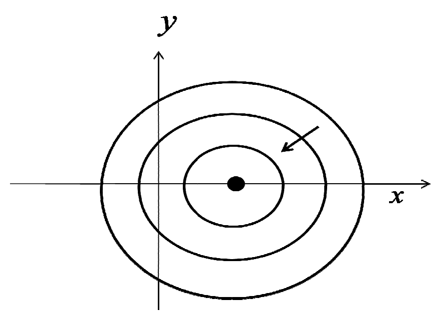
$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ S = \dfrac{14}{3}u \end{array}}$$

12 puntos

5.

$$Sea \quad z^2 = (x-1)^2 + y^2 \qquad Si \quad z = C$$

$$c^2 = (x-1)^2 + y^2 \qquad Circunferencia \ con \ centro \ en \ (1, 0)$$



10 puntos

6.

$$Sea \quad V = \pi r^2 h$$

$$Si \quad dV \doteq \Delta V$$

$$\Rightarrow dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh = 2\pi rh\, dr + \pi r^2\, dh$$

$$Si \quad r = 10cm \quad dr = -0.2cm$$

$$h = 15cm \quad dh = -0.5cm$$

$$\Rightarrow dV = 2\pi(10)(15)\left(-\frac{2}{10}\right) + \pi(10)^2\left(-\frac{5}{10}\right)$$

$$dV = -60\pi - 50\pi$$

$$\Rightarrow dV = -110\,\pi\ cm^3$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ dV = -110\,\pi\ cm^3 \end{array}}$$

13 puntos

7.

$$\frac{df}{ds} = \overline{\nabla} F \bullet \overline{u}$$

$$Si \quad \overline{\nabla} F = \left(xy\ e^{xy} + e^{xy}\right)i + x^2 e^{xy}\ j$$

$$\overline{\nabla} F = (ln\ 4 + 2)i + 2\ j$$

$$\frac{df}{ds} = [ln\ 4 + 2\ ,\ 2] \bullet \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{ln\ 4}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{df}{ds} = \frac{2}{\sqrt{2}}(ln\ 2 + 2)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ \dfrac{df}{ds} = \sqrt{2}\,(2 + ln\ 2) \end{array}}$$

15 puntos