UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO

TIPO "A"

Sinodales:* *M.E.M. Margarita Ramírez Galindo
M.I. Mayverena Jurado Pineda

8 de Marzo de 2010 ***Semestre 2010-2***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **7 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2.5 horas**.

---

1. Mediante el límite de la suma de Riemann, obtener

$$\int_{0}^{3} (3-x)\, dx$$

10 puntos

---

2. Sea la función

$$g(x) = cos(2x)$$

definida en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Determinar el valor medio de la función en el intervalo dado.

15 puntos

---

3. Calcular, de ser posible,

$$\lim_{x \to 0^{+}} \left(1 - senhx\right)^{coth\, x}$$

15 puntos

4. Determine

$$a)\int \frac{x-20}{2x+x^2-8}\,dx \qquad\qquad b)\int x\ln\left(x-1\right)\,dx$$

15 puntos

---

5. Calcular el área de la región limitada por las curvas de ecuaciones $f\left(x\right)=-x^2 \quad y \quad g\left(x\right)=-x-2$

15 puntos

---

6. Determinar el dominio y describir el lugar geométrico de las curvas de nivel de la función

$$f\left(x,y\right)=\frac{y}{\sqrt{4-x^2+4y^2}}$$

15 puntos

---

7. La temperatura en un punto $\left(x,y,z\right)$ está dada por

$$T\left(x,y,z\right)=2e^{-x^2-8y^2+9z^2}$$

En donde T se mide en °C y x,y,z en metros.

Obtener:

a) La razón de cambio de la temperatura en el punto $\left(-1,2,2\right)$ en la dirección del vector $\bar{u}=2i-2j+k$.

b) La dirección en que aumenta más rápidamente T, en el punto $\left(-1,2,2\right)$.

15 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO INTEGRAL

Solución del Primer Examen Extraordinario
Semestre 2010 – 2

1. $\int_0^3 (3-x)dx \quad \Rightarrow \quad f(x)=3-x$

$a)\ \Delta x = \frac{3}{n} \quad \Rightarrow \quad x_i = \frac{3}{n}i$

$b)\ f(x_i) = 3 - \left(\frac{3}{n}i\right)$

$c)\ \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)\left(3 - \frac{3}{n}i\right)$

$$\int_0^3 (3-x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)\left(3 - \frac{3}{n}i\right) = \boxed{\frac{9}{2}}$$

$$\boxed{\int_0^3 (3-x)dx = \frac{9}{2}}$$

12 puntos

2. $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

$$f(c) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos(2x)dx}{\frac{\pi}{4}-0} = \frac{4}{\pi}\int_0^{4} cos(2x)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}$$

$$f(c) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ f(c) = \frac{2}{\pi} \end{array}}$$

10 puntos

3.

$$\lim_{x\to 0^+} (1-senhx)^{coth\,x} = 1^{\infty}$$

$$y = (1-senhx)^{coth\,x}$$

$$ln\,y = ln(1-senhx)^{coth\,x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} ln\,y = \lim_{x\to 0^+} (coth\,x)\,ln(1-senhx)$$

$$\lim_{x\to 0^+} ln\,y = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{ln(1-senhx)}{tanh\,x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} (1-senhx)^{coth\,x} = \boxed{e^{-1}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ \lim_{x\to 0^+} (1-senhx)^{coth\,x} = e^{-1} \end{array}}$$

14 puntos

4. a)

$$\int \frac{x-20}{x^2+2x-8}dx = \int \frac{x-20}{(x+4)(x-2)}dx = \int \left(\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-2}\right)dx$$

$$\frac{x-20}{(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-2}$$

$$\boxed{A=\frac{8}{3}} \qquad \boxed{B=\frac{-5}{3}}$$

$$I = \frac{8}{3}\int \frac{1}{x+4}dx - \frac{5}{3}\int \frac{1}{x-2}dx = \frac{8}{3}\ln(x+4) - \frac{5}{3}\ln(x-2) + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Re}\,sultado \\ I = \ln\left|\sqrt[3]{\dfrac{(x+4)^8}{(x-2)^5}}\right| + C \end{array}}$$

b)

$$I = \int x\,ln(x-1)\,dx = \begin{bmatrix} u = ln(x-1) & du = \dfrac{1}{x-1}dx \\ dv = x\,dx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2}ln(x-1) - \int \left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{x^2}{2}ln(x-1) - \frac{1}{2}\int (x^2)\left(\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$z = x-1$$

$$dz = dx$$

$$I = \frac{x^2}{2}ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{(z+1)^2}{z}dz$$

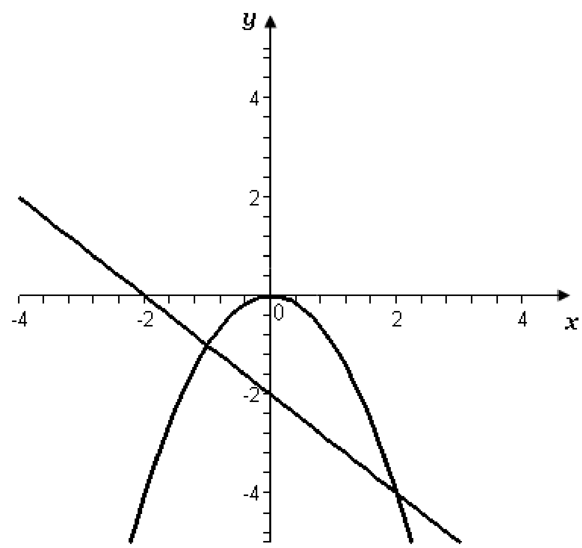
$$I = \frac{x^2}{2}ln(x-1) - \frac{1}{4}z^2 - z - \frac{1}{2}ln(z) + C$$

$$I = \frac{x^2}{2} ln\left(x-1\right) - \frac{1}{4}\left(x-1\right)^2 - \left(x-1\right) - \frac{1}{2} ln\left(x-1\right) + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ I = \frac{x^2}{2} ln\left(x-1\right) - \frac{1}{4}\left(x-1\right)^2 - \left(x-1\right) - \frac{1}{2} ln\left(x-1\right) + C \end{array}}$$

20 puntos

5.



$$-x^2 = -x - 2 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 2 \qquad x_2 = -1$$

$$A = \int_{-1}^{2} \left[-x^2 - \left(-x-2\right)\right] dx$$

$$A = -\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{2} + \frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{2} + 2x\Big|_{-1}^{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Re}\,sultado \\ A = \frac{9}{2}\, u^2 \end{array}}$$

15 puntos

---

6. $f\left(x,y\right) = \dfrac{y}{\sqrt{4 - x^2 + 4y^2}} = 0 \quad$ *No hay curva de nivel*

$$f(x,y)=\frac{y}{\sqrt{4-x^2+4y^2}}=1 \quad\rightarrow\quad y=\sqrt{4-x^2+4y^2}$$

$$y^2=4-x^2+4y^2$$

$$x^2-3y^2=4$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{\frac{4}{3}}=1 \quad \textit{Hipérbola}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{Respuesta} \\ a)D_f=\left\{(x,y)\middle|4-x^2+4y^2>0;x,y\in\mathbb{R}\right\} \\ b)\textit{Familia de Hipérbolas} \end{array}}$$

14 puntos

7.

$$z-x\,sen\,y+y\,sen\,x=0$$

$$F=z-x\,sen\,y+y\,sen\,x$$

$$\nabla F=(-sen\,y+y\cos x,-x\cos y+sen\,x,1)$$

$$\nabla F(\pi,\pi,0)=(-\pi,\pi,1)$$

$$(\overline{P}-\overline{P_0})\cdot\overline{N}=0$$

$$[(x,y,z)-(\pi,\pi,0)]\cdot(-\pi,\pi,0)=0$$

$$(x-\pi,y-\pi,z)\cdot(-\pi,\pi,0)=0$$

$$-\pi x+\pi y+z=0$$

$$\pi x-\pi y-z=0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{Respuesta} \\ \pi x-\pi y-z=0 \end{array}}$$

15 puntos