jueves, 18 de diciembre de 2014

La diferencial de Leibniz

En el contexto del análisis matemático, la cobertura de la diferencial es total: en las derivadas está presente explícita o implícitamente, según se use la notación de Lagrange o la notación de Leibniz; en las integrales, su presencia siempre es explícita; y en ambos casos, no está ahí de adorno o de mero acompañante; la diferencial es el vínculo entre derivada e integral, entre cálculo diferencial y cálculo integral.

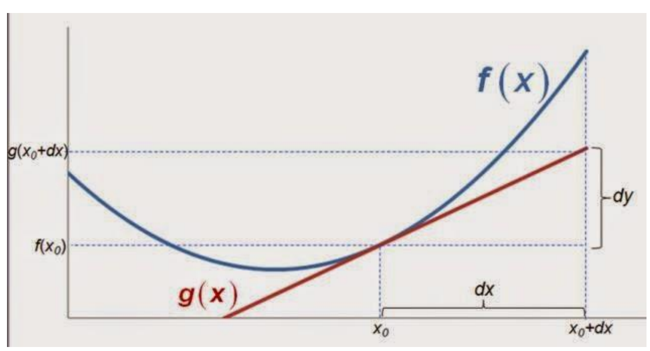
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \,, \qquad \int dy = \int df(x) = \int f'(x)\,dx = f(x) + c$$

Sin embargo, en los textos y cursos tradicionales, el uso habitual de la diferencial se apoya en la idea intuitiva de que en el rango de lo muy pequeño, los incrementos exactos se confunden con sus aproximaciones. Y es que la tangente a una curva se acerca tanto a ella, en la vecindad del punto de tangencia, que en esa vecindad, la curva es virtualmente indistinguible de su tangente. Cuando la diferencial *dx* es muy pequeña, la diferencial *dy* puede ser usada como una muy buena aproximación del incremento *Dy*, porque la diferencia entre ellos es prácticamente imperceptible.

Esta idea intuitiva condujo a pensar que tanto la diferencial de la variable *dx*, como la diferencial de la función *dy* tenían que ser pequeñas, es decir, tenían que ser cantidades infinitesimales; quedaba claro que el incremento *Dy* se medía sobre la función, en tanto que la diferencial *dy* se medía sobre su recta tangente; sin embargo, el uso de la diferencial quedaba restringido a la aproximación infinitesimal del incremento, nada más.

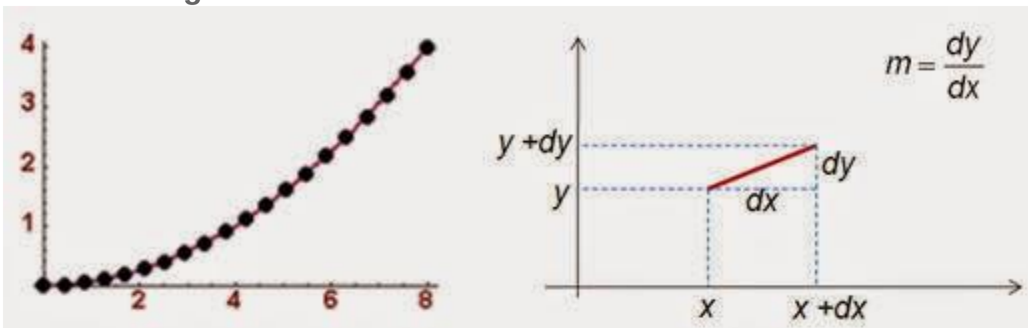
Pareciera que la confusión primigenia del concepto de diferencial nació de la definición que diera el propio Leibniz, su creador, subordinando su existencia al concepto de incremento y restringida a valores infinitamente pequeños. Las primeras ideas sobre la naturaleza de derivadas y diferenciales se basaron en la noción de infinitésimo o infinitamente pequeño, una clase especial de número, intuido como una cantidad fija cuyo valor es más pequeño que cualquier otro número, sin ser nunca nulo. Alrededor de 1680, Newton y Leibniz, por separado y de manera independiente, inventaron el cálculo; el uso de los infinitésimos fue la estrategia que ambos siguieron para su creación, por ello bautizado cálculo infinitesimal.

Leibniz llamaba diferencial de una magnitud y, a la variación infinitesimal dy que experimenta la imagen de la magnitud x sobre la recta tangente, al pasar de la posición x_0 a la posición $x_0 + dx$; a dy sólo se le podían asignar valores infinitamente pequeños y, en esa vecindad, coincidía con Δy, sin cometer error. Así, cuando el incremento de la variable Dx se acerca a cero, también se acerca a cero el incremento de la función Dy, haciéndose ambos infinitamente pequeños. Al llevar esto a la razón incremental Dy/Dx, ésta se transforma en un el cociente de cantidades infinitesimales, llamadas diferenciales y denotadas por dx y dy; el cociente dy/dx, que define a la derivada. Para Leibniz la derivada era un auténtico cociente, pero un cociente de infinitésimos.



La interpretación geométrica de esta idea consistía en considerar que una curva estaba formada por un número infinito de segmentos de recta infinitamente pequeños y que una tangente era una recta que contenía a uno de esos diminutos segmentos; para calcular la pendiente de la tangente en un punto (x, y), se hacía un desplazamiento infinitesimal sobre la curva, hasta

(*x+dx, y+dy*), y el cociente de infinitésimos *dy/dx*, se establecía como pendiente del segmento infinitesimal.



Por ejemplo, para calcular la derivada de la función $y = x^2$, Leibniz imaginaba que una variación infinitesimal *dx* generaba una variación también infinitesimal *dy*:

$y + dy = (x + dx)^2 = x2 + 2xdx + (dx)^2$, por lo tanto: $dy = 2xdx + (dx)^2$

Luego suprimía el término $(dx)^2$, argumentando de que el cuadrado de un número infinitamente pequeño es "infinitamente infinitamente pequeño", y por ende despreciable, obteniendo: $dy = 2xdx$.

Finalmente, al dividir por *dx*, tomaba la forma de cociente, que define la derivada: $dy/dx = 2x$

Esta simbología que ahora nos es tan familiar, fue creación de Leibniz. Él inventó los símbolos de la diferencial y la integral, y propuso reglas para manipularlos; también utilizó símbolos para mostrar conceptos e ideas, dándoles significado físico, y expresó sus razonamientos a través de fórmulas. Con ello, Leibniz fue el precursor de toda una filosofía de búsqueda de lenguaje para el cálculo.

"Esta voluntad que poseo de llegar a producir algo que sea considerable, me ha abierto caminos desconocidos y me ha llevado a estudiar un arte que no ha sido suficientemente cultivado por los hombres. Se trata del arte de inventar en general, cuyas reglas no están escritas en ningún sitio" Gottfried Leibniz.

En la estructura del cálculo, la diferencial ejerció un papel protagónico; se utilizaba para sustituir el incremento al calcular derivadas, advertidas éstas como cocientes de incrementos muy pequeños, y también para calcular integrales, percibidas éstas como sumas de infinitos incrementos muy pequeños.

No obstante sus dificultades y contradicciones, amplificadas por las muchas críticas disidentes, la diferencial de Leibniz significó una aportación insólita para la comprensión y el estudio de las ciencias físicas. La idea intuitiva de aproximación prevaleció a través de los siglos y ha sido muy bien aprovechada por físicos e ingenieros, que han aplicando la diferencial, aún sin saber bien a bien lo que es; la falta de entendimiento del concepto de diferencial condujo a un enfoque mecánico algorítmico, carente de

fundamento y despreocupado de significado, que todavía perdura en nuestros días.

El uso de cantidades infinitamente pequeñas para la invención del cálculo, también significó su punto más débil y el blanco de todas las críticas. No podía ser cierto que existiera un número que, sin ser cero, fuera más pequeño que todos los demás números. No era aceptable que escribieran como igualdad lo que sólo podía considerarse como aproximación. No era válido que algunas cantidades pequeñas que, de entrada, no eran cero, se descartaran luego, justo en el momento que se consideraba oportuno, y precisamente por ser muy pequeñas.

***"... no pueden obtenerse proposiciones verdaderas de principios falsos"* George Berkeley**

***"Aunque admito la exactitud de los resultados del nuevo cálculo, considero, sin embargo, que éstos están viciados por una cierta oscuridad y a veces conducen a absurdos; critico la inexactitud de despreciar las cantidades infinitesimales y juzgo oscuros y peligrosos esos métodos de cálculo"* Bernard Nieuwentijt**

La definición de diferencial de Leibniz resultó insuficiente, no sólo por la falta de argumentos para explicar cómo es que funcionaba el cálculo, sino porque muchas veces conducía a resultados equivocados. Ahora se sabe que es errónea la concepción de la diferencial de una función como cantidad infinitesimal que se aproxima al incremento infinitesimal de la función; sin embargo, tres siglos después, no ha sido desterrada del todo del ámbito educativo.

No hay demérito, sin embargo, en lo que lograron Leibniz y sus seguidores; la carencia de rigor matemático, al no disponer entonces de elementos teóricos sólidos, fue sustituida por su genial razonamiento y su extraordinaria intuición.