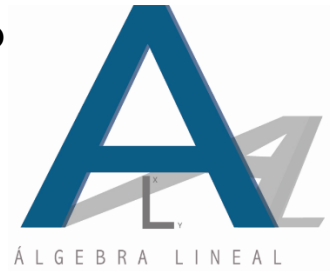




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
ÁLGEBRA LINEAL



SERIE 5

OPERADORES LINEALES EN ESPACIO CON PRODUCTO INTERO

1. Sean el espacio vectorial real $P = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ con producto interno definido por:

$$(p(x) \mid q(x)) = ac + bd \quad \forall p(x) = ax + b, q(x) = cx + d \in P$$

y el operador lineal $S : P \rightarrow P$ cuya regla de correspondencia es:

$$S(p(x)) = (a - b)x + (a + b) \quad \forall p(x) = ax + b \in P$$

Determinar el adjunto de S .

2. Sean el espacio vectorial complejo \mathbb{C}^2 con producto interno usual y el operador lineal $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ cuya regla de correspondencia es $F(x, y) = (x - iy, 2ix + (1 + i)y)$. Determinar el adjunto de F .

3. Sea P el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales con producto interno:

$$(ax^2 + bx + c \mid mx^2 + nx + p) = 2am + bn + cp$$

y el operador lineal $D : P \rightarrow P$ cuya regla de correspondencia es $D(p(x)) = p'(x)$, donde $p'(x)$ es la derivada de $p(x)$. Obtener el adjunto de D .

4. Sean el espacio vectorial \mathbb{C}^2 con el producto interno usual

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 \quad \forall \bar{u} = (u_1, u_2), \bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$$

Donde \bar{v}_1 y \bar{v}_2 son los conjugados de v_1 y v_2 respectivamente, y sea el operador lineal $S : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$S(x, y) = (2xi, iy)$$

- Obtener el adjunto de S
- Determinar si S es antihermitiano.

5. Sea el espacio vectorial \mathbb{R}^3 con producto interno usual y el operador lineal $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya regla de correspondencia es:

$$S(x, y, z) = (2x + 3y, 3x + 2y, 5z)$$

- a) Obtener el adjunto de S
b) Determinar si S es normal.

6. Sean V un espacio vectorial con producto interno complejo y $\lambda \in \mathbb{C}$. Determinar si el operador $T: V \rightarrow V$ tal que $T(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$ es normal.

7. Sea el espacio vectorial \mathbb{R}^3 con producto interno usual y el operador lineal $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya regla de correspondencia es

$$S(x, y, z) = (2y + 2z, 2x + 2z, 2x + 2y)$$

- Determinar si S es un operador simétrico
Obtener la proyección asociada al valor característico $\lambda = -2$ de S .

8. Sean el espacio vectorial \mathbb{R}^3 con producto interno usual y el operador lineal $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$S(1, 1, 0) = (3, 2, 0)$$

$$S(0, -1, 0) = (-2, 0, 1)$$

$$S(0, 2, 2) = (6, -2, 4)$$

- Determinar si S es un operador simétrico.

9. Sea el espacio vectorial complejo \mathbb{C}^3 con producto interno usual

$$(\bar{u} | \bar{v}) = a\bar{m} + b\bar{n} + c\bar{r} \quad \forall \bar{u} = (a, b, c), \bar{v} = (m, n, r) \in \mathbb{C}^3$$

- Donde \bar{m}, \bar{n} y \bar{r} son los conjugados de m, n y r respectivamente y sea el operador lineal $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ cuya regla de correspondencia es

$$T(a, b, c) = (a + b + 3c + (4b - c)i, a + 2b + (c - 4a)i, 3a + (a - b)i)$$

- Determinar si el operador T es hermitiano.

10. Sean el espacio vectorial complejo \mathbb{C}^2 con un producto interno y $B_0 = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 0 \right), (0, 1) \right\}$ una base ortonormal de \mathbb{C}^2 respecto a dicho producto interno y sea $S: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ el operador lineal tal que:

$$S(x, y) = (ix + (2 + i)y, (-2 + i)x + 3iy)$$

- Determinar si S es un operador antihermitiano.

11. Sea el espacio vectorial complejo \mathbb{C}^3 con producto interno

$$(\bar{u} | \bar{v}) = a\bar{m} + b\bar{n} + c\bar{r} \quad \forall \bar{u} = (a, b, c), \bar{v} = (m, n, r) \in \mathbb{C}^3$$

Donde \bar{m}, \bar{n} y \bar{r} son los conjugados de m, n y r respectivamente, y sea el operador lineal $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ cuya regla de correspondencia es

$$T(a, b, c) = (a + b + 3c + (4b - c)i, a + 2b + (c - 4a)i, 3a + (a - b)i)$$

Determinar si el operador T es hermitiano.

12. Sean el espacio vectorial complejo \mathbb{C}^2 con producto interno usual y el operador lineal $F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ Determinar los valores de $k \in \mathbb{C}$ para que F sea un operador unitario, tal que:

$$F(1, 0) = \left(\frac{k}{5}, -\frac{4}{5}i \right) \text{ y } F(0, 1) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{k}{5}i \right).$$

13. Sean el espacio vectorial \mathbb{R}^3 con producto interno usual y el operador lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$$

Determinar si T es un operador ortogonal.

14. Los valores característicos del operador lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(x, y, z) = (2x + y, x + 2y, z)$$

son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 3$ y sus espacios característicos son $E(1) = \{(a, -a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$

y $E(3) = \{(c, c, 0) | c \in \mathbb{R}\}$. Obtener la descomposición espectral de T .

15. Sea el espacio vectorial \mathbb{C}^2 con producto interno definido por

$$(\bar{z} | \bar{w}) = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 \quad \forall \bar{z} = (z_1, z_2), \bar{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$$

Determinar la descomposición espectral del operador lineal $S: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ cuya regla de correspondencia es

$$S(z_1, z_2) = (-iz_2, iz_1).$$

16. Sea el espacio \mathbb{R}^2 con producto interno usual y $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un operador lineal tal que

$$T(a, b) = (-a + 2b, 2a + 2b)$$

Obtener la descomposición espectral de T .

17. Sea el espacio vectorial \mathbb{R}^2 con producto interno usual. Determinar la descomposición espectral del operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada respecto a la base canónica de \mathbb{R}^2 es:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

18. Sea $N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ la matriz asociada al operador lineal $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ respecto a la base canónica.

Determinar:

- El polinomio característico de H
- Los valores característicos de H
- Una base de cada uno de los espacios característicos de H
- Una matriz diagonalizadora de H
- La descomposición espectral de H .

19. Sea la curva cuya ecuación es de la forma cuadrática:

$$5x^2 + 4xy + 5y^2 - 21 = 0$$

- Obtener una matriz simétrica asociada a la forma cuadrática
- Determinar unas ecuaciones de C que no contengan término cruzado
- Trazar la curva C .

20. Sea la superficie C cuya ecuación es la forma cuadrática

$$2x^2 + y^2 + 2xz + 2z^2 = 1$$

- Obtener una matriz simétrica asociada a la forma cuadrática
- Determinar unas ecuaciones de C que no tengan un término cruzado
- Trazar C .