UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA LINEAL

SERIE 4

ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

---

1. Determinar si la función $f:\mathbb{R}^2 \; x \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un producto interno. La función es definida por $f(\bar{x},\bar{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2 \quad \forall\ \bar{x}=(x_1,x_2),\ \bar{y}=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$.

---

2. Sean el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2 = \{(z_1,z_2) \mid z_1,z_2 \in \mathbb{C}\}$ y la función $f:\mathbb{C}^2 \; x \; \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(\bar{z},\bar{w}) = 3z_1\bar{w}_1 + 2z_2\bar{w}_2 \quad \forall \bar{z}=(z_1,z_2), \bar{w}=(w_1,w_2)\in\mathbb{C}^2$$

Donde $\bar{w}_1$ y $\bar{w}_2$ son el conjugado de w_1 y w_2 respectivamente. Determinar si f es un producto interno en $\mathbb{C}^2$ considerando que

$$f(\bar{z},\bar{w}+\bar{x}) = f(\bar{z},\bar{w}) + f(\bar{z},\bar{x})$$

---

3. Sea el espacio vectorial real $P=\{ax+b \mid a,b\in\mathbb{R}\}$. Determinar si la función $f:P \; x \; P \to \mathbb{R}$, cuya regla de correspondencia es

$$f(p,q) = ac \quad \forall p(x)=ax+b,\ q(x)=cx+d\in P$$

es un producto interno en P . En caso afirmativo, calcular la norma de $p(x)=1$. En caso negativo, indicar todos los axiomas que f no cumple.

---

4. Para el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}=\{z \mid z=a+bi,\ i^2=-1;\ a,b\in\mathbb{R}\}$ determinar si la función $F:\mathbb{C} \; x \; \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, definida por

$$F(z_1,z_2) = z_1\overline{(z_2+i)} \quad \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$$

Es un producto interno. En caso afirmativo, calcular la norma del vector $z=2-3i$; en caso contrario, indique los axiomas de la definición que no se cumplen.

5. Sea el espacio vectorial real $M=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{bmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$ con producto interno definido por:

$$\left(A\,|\,B\right)=tr\left(AB^T\right)\quad \forall A,B\in M$$

Obtener una matriz $D\in M$ que forme un ángulo de 45° con la matriz $E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ y que diste una unidad de la matriz $F=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

---

6. Sea el producto interno en $\mathbb{C}^2$ definido por

$$\left(\bar{v}\,|\,\bar{w}\right)=v_1\overline{w}_1+2v_2\overline{w}_2 \qquad \forall\ \bar{v}=\left(v_1,v_2\right),\ \bar{w}=\left(w_1,w_2\right)\in\mathbb{C}^2$$

Donde $\overline{w}_1$ y $\overline{w}_2$ son el conjugado de w_1 y w_2 respectivamente. Para los vectores $\bar{v}=\left(i,\ 2-i\right)$ y $\bar{w}=\left(-1,\ 1+i\right)$

a) Obtener el coseno del ángulo entre los vectores $\bar{v}$ y $\bar{w}$
b) Calcular la distancia del vector $\bar{v}$ al vector $\bar{w}$
c) Determinar si $\bar{v}$ y $\bar{w}$ son ortogonales

---

7. Sean P_2 el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales y el producto interno en P_2 definido por

$$\left(\bar{p}\,|\,\bar{q}\right)=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 \quad \forall\ \bar{p}=a_1x^2+b_1x+c_1,\ \bar{q}=a_2x^2+b_2x+c_2 \quad \in P_2$$

y sean los vectores $\bar{u}=x^2+x+a,\ \bar{v}=x-3.$ Determinar el conjunto de valor de $a\in\mathbb{R}$, tal que:

a) El ángulo entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$ sea $\dfrac{\pi}{2}$ rad
b) La norma de $\bar{u}$ sea $\sqrt{18}$

---

8. Para el producto interno usual en el espacio complejo $\mathbb{C}^2$ definido por

$$\left(\bar{u}\,|\,\bar{v}\right)=u_1\overline{v}_1+u_2\overline{v}_2 \qquad \forall\ \bar{u}=\left(u_1,u_2\right),\ \bar{v}=\left(v_1,v_2\right)\in\mathbb{C}^2$$

donde $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ representan el conjugado de v_1 y v_2 respectivamente, obtener un vector $z\in\mathbb{C}^2$ con primera componente real, que sea ortogonal al vector $\bar{u}=\left(3,\ i\right)$ y tal que la distancia entre $\bar{z}$ y $\bar{w}=\left(-2,\ 1+i\right)$ sea igual a la distancia de $\bar{u}$ y $\bar{w}$.

9. Sea el espacio vectorial real $P=\left\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ con producto interno definido por

$$\left(\bar{p}\mid\bar{q}\right)=\int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

Obtener el conjunto de todos los valores $k\in\mathbb{R}$ que hacen que el conjunto $G=\left\{2x^2-x,\ kx^2-1\right\}$ sea ortogonal.

---

10. En el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$ se define el producto interno usual como

$$\left(\bar{u}\mid\bar{v}\right)=u_1\bar{v}_1+u_2\bar{v}_2 \qquad \forall\bar{u}=(u_1,u_2),\ \bar{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{C}^2$$

donde $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ representan el conjugado de v_1 y v_2 respectivamente. Determinar el número $a\in\mathbb{C}$ para que el conjunto $D=\left\{(1+i,\ 2i),(3+i,\ a)\right\}$ sea una base ortogonal de $\mathbb{C}^2$. Además, a partir de la base D, obtener una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$.

---

11. Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno definido por

$$\left(\bar{x}\mid\bar{y}\right)=3x_1y_1+x_2y_2+2x_3y_3 \quad \forall\ \bar{x}=(x_1,x_2,x_3),\ \bar{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$$

y sea $W=\left\{(x,y,y-2x)\mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Determinar:

a) Una base ortogonal de W
b) La proyección del vector $\bar{a}=(1,\ 3,-1)$ sobre W
c) La distancia entre el vector $\bar{a}$ y su proyección sobre W

---

12. Empleando el producto interno usual en $\mathbb{R}^3$, por medio del proceso de Gram-Schmidt determinar una base ortonormal del espacio columna de la matriz N

$$N=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

---

13. Sea P_1 el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a uno con coeficientes reales y M el subespacio de P_1 generado por el conjunto $A=\left\{1-x,\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right\}$, y sea el producto interno definido por

$$\left(p\mid q\right)=\sum_{i=0}^{1}2a_ib_i \qquad \forall\ p(x)=a_0+a_1x,\ q(x)=b_0+b_1x\in P_1$$

Determinar el polinomio $m(x)\in M$ más próximo a $r(x)=1+2x$

14. Sean el espacio $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual en $\mathbb{R}^3$ y W el subespacio de $\mathbb{R}^3$, una de cuyas bases es $B=\{(1,\ 1,\ -2),(1,\ -1,\ 0)\}$. Determinar la base y la dimensión del complemento ortogonal de W.

---

15. El espacio vectorial real $P=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ tiene un producto interno definido por:

$$\left(p(x)\mid q(x)\right)=ar+bs+ct \quad \forall\, p(x)=ax^2+bx+c,\ q(x)=rx^2+sx+t\in P$$

y sea W el espacio de P generado por el conjunto $G=\{x^2-1,\ x+1\}$. Determinar el complemento ortogonal de W.

---

16. Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual y $W=\{(x,y,z)\mid x-y=0;\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

a) Determinar el complemento ortogonal $W^{\perp}$ de W.

b) Expresar al vector $\bar{v}=(1,0,1)$ como la suma $\bar{v}=\bar{a}+\bar{b}$ donde $\bar{a}\in W$ y $\bar{b}\in W^{\perp}$.

---

17. Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno definido por:

$$(\bar{u}\mid\bar{v})=u_1v_1+2u_2v_2+u_3v_3 \quad \forall \bar{u}=(u_1,u_2,u_3),\ \bar{v}=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$$

Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^3$ una de cuyas bases es $J=\{(1,0,1),(0,1,1)\}$.

Determinar:

a) Una base ortogonal de W.

b) El complemento ortogonal de W.

c) La proyección del vector $\bar{u}=(1,1,1)$ sobre W.

---

18. Sea el espacio vectorial real $M=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$ con producto interno

$$(A\mid B)=tr\left(B^T A\right)$$

Y sea el subespacio $W=\left\{\begin{bmatrix} m & n \\ m-n & m+n\end{bmatrix} \,\middle|\, m,n\in\mathbb{R}\right\}$.

Determinar la proyección de $\bar{v}=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2\end{bmatrix}\right\}$ sobre W.

19. Determinar la ecuación de la recta $y = mx + b$ por mínimos cuadrados que mejor se ajusta a los puntos $A(-2,3), B(0,0), C(4,4)$.

---

20. A partir de un experimento se obtienen los siguientes datos: $(-1,0),(0,1),(1,2),(2,1)$. De acuerdo a un ajuste lineal de mínimos cuadrados $y = mx + b$, determinar la ordenada que corresponde a la abscisa $x = 8$.