**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS**

**ÁLGEBRA LINEAL**

**SERIE 3**

**TRANSFORMACIONES LINEALES**

---

1. Sean el espacio vectorial real $P=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ y $D:P\to P$ la transformación cuya regla de correspondencia es

$$D\left(p(x)\right)=\frac{dp(x)}{dx} \quad \forall p(x)\in P$$

Determinar:

a) Si D es una transformación lineal
b) El núcleo de D
c) El recorrido de D
d) Si existe, la inversa de D

---

2. Sea $P_1$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a uno con coeficientes reales. La matriz asociada a la transformación lineal $T:P_1\to\mathbb{R}^3$ referida a las bases $A=\{2x+1,\ -x+1\}$ y $B=\{(0,0,1),\ (0,1,1),\ (1,1,1)\}$ es

$$M_B^A(T)=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 4 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

Obtener:

a) La regla de correspondencia de $T$.
b) El núcleo y el recorrido de $T$.

---

3. Sea el espacio vectorial real $P=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ y la transformación lineal $F:P\to P$ cuya regla de correspondencia es:

$$F\left(ax^2+bx+c\right)=(a+2b)x^2+(a+c)x+(2b-c)$$

a) Determinar el núcleo de F y la dimensión de $N(F)$
b) El recorrido de $F$.

4. Sea el operador $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya regla de correspondencia es

$$F(a,b)=(a+b+1,\ a-b)$$

Determinar:

a) Si el operador $F$ es lineal
b) Obtener el núcleo del operador $F$
c) ¿El núcleo de $F$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$? Justifique su respuesta

---

5. Sea el espacio vectorial real $P=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ y la transformación lineal $T:\mathbb{R}^2 \to P$ tal que:

$$T(1,2)=2x^2-x+1$$
$$T(2,1)=x^2+x+2$$

Determinar la regla de correspondencia de $T$.

---

6. Sean $P_1$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a uno con coeficientes reales y $T:P_1 \to P_1$ una transformación lineal en $P_1$. Si el vector $\bar{m}=1+x$ pertenece al núcleo de $T$ y $T(1-x)=x+1$

Determinar:
a) La regla de correspondencia de $T$
b) Una matriz asociada a $T$
c) Si existe, la transformación inversa de $T$

---

7. Sea $M_B^A(T)=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a la transformación lineal $T:D \to P_2$ donde $D$ y $P_2$ son los espacios reales

$$D=\left\{\begin{bmatrix} m & 2m & r \\ m+r & m-r & 3r \end{bmatrix} \middle| m,r\in\mathbb{R}\right\};\qquad P_2=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$$

Referida a la base $A=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}\right\}$ y a la base $B=\{x^2,\ x+1, -1\}$

Obtener

a) La regla de transformación T,
b) La imagen de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ bajo la transformación T,
c) El recorrido $T(D)$ y una base de éste.

8. Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal donde:

$$T(1,0,0)=(2,3) \quad T(0,1,0)=(-1,2) \quad T(0,0,1)=(1,2)$$

Determinar la matriz asociada a la transformación T referida a las bases

$$A=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\} \text{ y } B=\{(1,1),(0,1)\}$$

---

9. Sean las transformaciones lineales $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $U:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuyas reglas de correspondencia son

$$T(a,b)=(2a,\ 4b-a) \text{ y } U(a,b)=(b,a)$$

Determinar si $(T\circ U)(1,1)=(U\circ T)(1,1)$.

---

10. Sean el espacio vectorial real $P_2=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ y las transformaciones lineales $T:\mathbb{R}^3 \to P_2$ y $S:\mathbb{R}^3 \to P_2$ cuyas matrices asociadas respecto a las base $A=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ y $B=\{1,\ x,\ x^2\}$ son:

$$M_B^A(T)=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad M_B^A(S)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtener la regla de correspondencia de $S+T$.

---

11. Sean $M_{2x2}$ el espacio vectorial real de las matrices simétricas de orden dos con elementos reales y $P_2$ el espacio vectorial reales de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales, y sea $T:M_{2X2}\to P_2$ la transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right)=(a+b)x^2+bx+(a-c)$$

si es posible, determinar la regla de correspondencia de $T^{-1}$, considerando las bases

$$A=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\} \quad \text{y} \quad B=\{x^2,\ x,\ 1\}$$

de $M_{2X2}$ y $P_2$ respectivamente.

---

12. Sean el espacio vectorial real $P=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ y la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to P$ tal que

$$T(a,b,c)=(a+b-2c)x^2+(a+2b+c)x+(2a+2b-3c)$$

a) Determinar la inversa de $T$.
b) Obtener el núcleo y recorrido de la inversa de $T$.

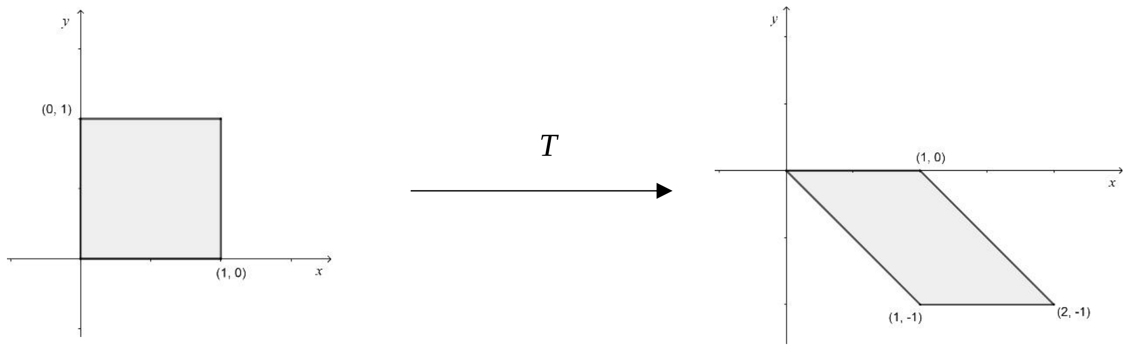
13. Sea M el espacio vectorial real de matrices cuadradas de orden dos con elementos reales y el operador lineal $S : M \to M$ cuya regla de correspondencia es

$$S(A) = A^T \quad \forall A \in M$$

Donde $A^T$ es la matriz transpuesta de $A$. Determinar la regla de correspondencia de $(S \circ S)^{-1}$.

---

14. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal cuyo efecto geométrico sobre el cuadro unitario es el que se muestra en la figura




Obtener la matriz asociada a $T$ referida a las bases $A = \{(1,1),(0,1)\}$ y $B = \{(0,2),(-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

---

15. Determinar si existe una matriz diagonal asociada al operador lineal $S : P_2 \to P_2$ tal que $S(ax^2 + bx + c) = (-a + 2b + c)x^2 + (3b + 2c)x + 6b + 2c$ donde $P_2$ es el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a dos. En caso afirmativo dar una matriz diagonal asociada a $S$ y la matriz diagonalizadora correspondiente. En caso negativo, explicar por qué no existe.

---

16. Sean el espacio vectorial real $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ y el operador lineal $F : M \to M$ definido por:

$$F \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & a+b \\ a+b & 2c \end{bmatrix}$$

Determinar:

a) Los valores característicos de $F$.

b) Una matriz diagonal $D$ asociada a $F$ y la base a la que está referida dicha matriz $D$.

17. Sean $F:\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ el operador lineal cuya representación matricial respecto a la base $B=\{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,0,1)\}$ de $\mathbb{C}^3$ es $M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-i & 0 \\ 0 & 0 & 3+i \end{bmatrix}$

Obtener:

a) Los valores característicos de $F$.

b) Los espacios característicos de $F$.

---

18. Los valores característicos del operador lineal $S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ son $\lambda_1=\lambda_2=-2$ y $\lambda_3=1$, el operador se define como:

$$S(x,y,z)=(-2x,\ 4x+2z,\ -2x+y-z)$$

Determinar, si existe, una matriz diagonal asociada a $S$.

---

19. Sea el operador lineal $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya regla de correspondencia es $F(x,y)=(4x-5y,\ 2x-3y)$.

Determinar:

a) Una matriz $M$ asociada a $F$.

b) Los valores característicos de $F$.

c) Los espacios característicos de $F$.

d) Una matriz diagonal asociada a $F$, y una matriz diagonalizadora de $M$.

---

20. Sean el espacio vectorial real $P_2=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ y el operador lineal $T:P_2\to P_2$ cuya regla de correspondencia es

$$T(ax^2+bx+c)=cx^2+ax+b$$

a) Obtener el núcleo y el recorrido de $T$

b) Determinar el espacio característico asociado a cada valor propio de $T$

c) Obtener, si existe, una matriz diagonal $D$ asociada al operador $T$. En caso afirmativo, indicar la base a la que está referida la matriz $D$; en caso negativo, explicar la razón de la no existencia de la matriz $D$.