



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
ÁLGEBRA LINEAL
SERIE 2
ESPACIOS VECTORIALES



1. Sean V el conjunto de los números reales y las operaciones de adición y multiplicación por un escalar definidas por:

$$\begin{aligned}x + y &= x + y & \forall x, y \in V \\ kx &= 2kx & \forall x \in V, k \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Determinar si V es un espacio vectorial real. En caso afirmativo obtener el elemento inverso de $x = 8$. En caso negativo indicar todos los axiomas que no se satisfacen.

2. Determinar si el conjunto $V = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0\}$ con las operaciones definidas por

$$\begin{aligned}(a, b) \oplus (c, d) &= (ad + bc, bd) & \forall (a, b), (c, d) \in V \\ \alpha(a, b) &= (\alpha a, b) & \forall \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

es un espacio vectorial real, considerando que se cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}i) \quad & \bar{u} \oplus (\bar{v} \oplus \bar{w}) = (\bar{u} \oplus \bar{v}) \oplus \bar{w} \\ ii) \quad & \bar{u} \oplus \bar{v} = \bar{v} \oplus \bar{u} & \forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V; \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ iii) \quad & \alpha(\bar{u} \oplus \bar{v}) = \alpha\bar{u} \oplus \alpha\bar{v}\end{aligned}$$

3. Sean el espacio vectorial real $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y $D = \{p(x) \mid p(0) = 3\}$ un subconjunto de P_2 . Determinar si D es un subespacio de P_2 .

4. Sean el espacio vectorial \mathbb{R}^3 y $H = \{(x, y, z) \mid 3x - y + 2z = 0; x, y, z \in \mathbb{R}\}$ un subconjunto de \mathbb{R}^3 . Comprobar que H es un subespacio de \mathbb{R}^3 .

5. Sean los conjuntos $A = \{(a, b, c) \mid b = c; a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{(a, b, c) \mid a = 2b; a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Determinar si $A \cap B$ es un subespacio del espacio vectorial real \mathbb{R}^3 .

6. Dado el espacio vectorial \mathbb{C}^3 sobre \mathbb{C} , demostrar que la función $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow M_3$ definida por

$$F(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

donde M_3 es el espacio de matrices diagonales de 3x3 con elementos complejos, es un isomorfismo.

7. Sean el espacio vectorial real $V = \{ax^2 + bx + 2a - b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y el conjunto $E = \{2x^2 + x + 3, x^2 + 2\}$. Determinar si E es una base de V .

8. El espacio W es generado por el conjunto $\{x^2 + 7x + 4, -2x^2 - 8x - 5, 3x^2 + 9x + 6\}$, determinar una base y la dimensión de W .

9. Sea el conjunto $J = \{1 + 3x, x + 3x^2, 1 + mx^2\}$. Determinar el conjunto S de valores de $m \in \mathbb{R}$ para que el espacio generado por J sea de dimensión 2.

10. Sean $A = \{xe^x, e^x\}$ y $B = \{xe^x + e^x, -3e^x\}$ bases del espacio vectorial U .

Determinar:

a) La matriz de transición de la base A a la base B

b) El vector $f(x) \in U$ cuyo vector de coordenadas respecto a la base B es $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

11. Sea V el espacio vectorial real de polinomios de grado menor o igual a dos, cuyas bases son

$E = \{x^2, x^2 + x, x^2 + x + 1\}$ y $F = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$. La matriz de transición de la base E a la base F

$$M_F^E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y el vector de coordenadas del vector $\bar{v} \in V$ respecto a la base F $[\bar{v}]_F = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Determinar:

- Los vectores de la base F
- El vector de coordenadas de \bar{v} respecto a la base E

12. El espacio renglón de la matriz $H = \begin{bmatrix} m & 2 & 3 \\ n & 3 & 5 \\ r & 2 & 5 \end{bmatrix}$ es $L(H_r) = \{(a, b, a+b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Determinar:

- El valor de cada uno de los elementos m , n y r
- Con los valores obtenidos en el inciso anterior, determinar el espacio columna de H .
- Obtenga el rango de H .

13. Si el rango de $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 & 9 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & k \end{bmatrix}$ es igual a 2. Determinar:

- El valor de k .
- Una base del espacio renglón de A

14. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 2y - 7z &= 0 \\ -2y + 10z &= 0 \\ -2x + 3y + \alpha z &= 0 \end{aligned}$$

Obtener su matriz de coeficientes y determinar el conjunto de valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que:

- El espacio columna de la matriz de coeficientes sea de dimensión 3.

b) Una base del espacio solución del sistema sea $B = \{(-3, 5, 1)\}$.

15. Determinar cuáles de los siguientes vectores pertenecen al espacio columna de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3} \\ -4 \\ 6\sqrt{7} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 6 \\ \sqrt{13} \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}$

16. Sea la matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 9 & 5 \end{bmatrix}$. Determinar:

- a) Una base del espacio columna de M .
b) El rango de M .

17. Determinar si el conjunto $J = \{f, g\}$ es linealmente dependiente o linealmente independiente en cada uno de los intervalos: $[-5, 2)$, $[0, 5]$ y $[2, 7)$; si f y g son

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6 & \text{para } x \leq 2 \\ e^{2x} & \text{para } x > 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{para } x \leq 2 \\ 5e^{2x} & \text{para } x > 2 \end{cases}$$

18. Determinar si el conjunto $H = \{1, \ln(x), \ln(x^2)\}$ es linealmente dependiente o linealmente independiente.

19. Determinar si el conjunto $F = \{h, k\}$ es linealmente dependiente o linealmente independiente en cada uno de los intervalos $[-5, 2)$, $[0, 5]$ y $[2, 7)$; si h y k son

$$h(x) = \begin{cases} \text{sen}2x & \text{para } x \leq 2 \\ 2x^3 + 4x & \text{para } x > 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 3\text{sen}2x & \text{para } x \leq 2 \\ x^3 + 2x & \text{para } x > 2 \end{cases}$$

20. Determinar si el conjunto $D = \left\{ \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right), \text{sen}^2 x \cos x \right\}$ es linealmente dependiente o linealmente independiente, en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.