UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

PRIMER EXAMEN FINAL

ÁLGEBRA LINEAL

2 DE JUNIO DE 2017

SEMESTRE 2017 - 2

TIPO C

Instrucciones: Leer cuidadosamente el enunciado de cada uno de los **6** reactivos de que consta el examen antes de comenzar a resolverlos. La duración del examen es de 2.0 horas.

1. Obtener $D = N \cap P$ y demostrar que D es un subespacio del espacio vectorial real de las matrices simétricas de 2x2, donde los subespacios N y P son:

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \middle| 2a - 3b - c = 0; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad P = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \middle| a - 2b + 2c = 0;\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Sea el conjunto $A = \{(1, k, 1), (1, -k, -1), (0, 1, 2)\}$.

a) Determinar el valor de $k \in \mathbb{R}$ que hace que el conjunto A sea linealmente dependiente.
b) Con $k = 3$, obtener una base del espacio generado por el conjunto A, $L(A)$.

3. Dado el espacio vectorial $P_1 = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y la transformación lineal $T : P_1 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$T(1) = (1, 2) \quad \text{y} \quad T(x) = (2, 1)$$

Determinar:
a) La imagen del vector $\bar{w} = 1 + x$, $T(\bar{w})$.
b) Una base del recorrido de T.
c) La dimensión del núcleo de T.

TIPO C

4. Sea el operador lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z)=\left(x,\ x+3y,\ x+3z\right)$.

Determinar:

a) Una matriz asociada a T.

b) Los valores característicos de T y el espacio característico asociado a cada uno de ellos.

c) Una matriz que diagonalice al operador T.

5. Sea $N=\left\{\left(a,b,c\right)\ \middle|\ -2a+b-c=0;\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$, y el producto interno usual en $\mathbb{R}^3$

Obtener al vector $\bar{w}\in N$ más próximo al vector $\bar{v}=\left(0,0,1\right)$.

6. Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ definido sobre el campo de los números complejos, con el producto interno usual en $\mathbb{C}^2$ y el operador lineal $S:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$S(x,y)=\left(ix+\left(1+i\right)y,\ \left(-1+i\right)x+2iy\right)$$

Determinar si S es un operador normal.