UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

PRIMER EXAMEN FINAL

ÁLGEBRA LINEAL

31 DE MAYO DE 2016

SEMESTRE 2016 - 2

TIPO C

Instrucciones: Leer cuidadosamente el enunciado de cada uno de los **6** reactivos de que consta el examen antes de comenzar a resolverlos. La duración del examen es de 2.0 horas.

1. El sistema $(A,*)$ en donde $A=\mathbb{R}-\{-1\}$ y la operación binaria $*$ definida por

$$x*y=x+xy+y \quad \forall\ x,y\in A$$

es un grupo abeliano. Obtener el inverso de $u=1*2$.

2. Sean A y $B=\{(2,4),\ (3,-9)\}$ dos bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y $M_A^B=\begin{pmatrix} a & -3 \\ -2 & b \end{pmatrix}$ la matriz de transición de la base B a la base A y sea $\bar{u}=(6,102)$ cuyo vector de coordenadas respecto a la base A es $[\bar{u}]_A=\begin{pmatrix} 21a \\ -10b \end{pmatrix}$. Determinar los valores $a,b\in\mathbb{R}$.

3. Sean los espacios vectoriales reales $\mathbb{R}^3$ y $P=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ y sean $A=\{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\}$ y $B=\{x^2-1,\ x+1,\ 1\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y P, respectivamente, y sean las transformaciones lineales $T:\mathbb{R}^3\to P$ y $S:P\to\mathbb{R}^3$ cuyas matrices asociadas respecto a las bases A y B son

$$M_B^A(T)=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N_A^B(S)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Obtener la regla de correspondencia de $S\circ T$.

4. La matriz asociada al operador lineal $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto a la base canónica es

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Obtener los espacios característicos de *F*.
b) Determinar, si existe, una matriz diagonalizadora de *F*.

5. Sea el espacio vectorial real $M=\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \; a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$ con producto interno $\left(A\,|\,B\right)=tr(B^T A)$ y sea $W=\left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ m-n & m+n \end{pmatrix} \middle| \; m,n \in \mathbb{R} \right\}$. Determinar la proyección de $\bar{v}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sobre *W*.

6. Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ con producto interno definido por

$$(\bar{z}\,|\,\bar{w}) = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 \quad \forall \;\; \bar{z}=(z_1,z_2), \bar{w}=(w_1,w_2) \in \mathbb{C}^2$$

Determinar la descomposición espectral del operador lineal $S:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ cuya regla de correspondencia es $S(z_1,\, z_2)=(-iz_2,\, iz_1)$.