UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
SEGUNDO EXAMEN FINAL
ÁLGEBRA LINEAL
7 DE JUNIO DE 2016

SEMESTRE 2016 - 2

TIPO A

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente el enunciado de cada uno de los 6 reactivos de que consta el examen antes de comenzar a resolverlos. La duración máxima del examen es de 2.0 horas.

1. Sea el sistema algebraico $(\mathbb{Q},*,\Delta)$, en el que $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales y las operaciones $*$ y Δ están definidas por

$$\begin{array}{l} a*b=a+b \\ a\,\Delta\, b=5ab \end{array} \qquad \forall a,b\in\mathbb{Q}$$

Considerando que el sistema $(\mathbb{Q},*)$ es un grupo abeliano, que Δ es cerrada, asociativa y conmutativa en $\mathbb{Q}$, y que además, Δ es distributiva sobre $*$ por la izquierda, determinar si el sistema $(\mathbb{Q},*,\Delta)$ tiene estructura de campo.

2. Determinar el espacio W que es generado por el conjunto $A=\left\{x^2+7x+4,-2x^2-8x-5,3x^2+9x+6\right\}$, así como una base y la dimensión de W.

3. Sea la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ cuya regla de correspondencia es

$$T(x,y,z)=(x+4y+7z,\ 2x+5y+8z,\ 3x+6y+9z)$$

Determinar:

a) El núcleo y la dimensión de T.

b) El recorrido de T y una de las bases de dicho recorrido.

4. Sean el espacio vectorial real $M=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c\end{bmatrix} \middle|\, a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ y el operador lineal $F:M\to M$ definido por

$$F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a+b & a+b \\ a+b & 2c\end{bmatrix}$$

Determinar:

a) Los valores característicos de F.

b) Los vectores característicos de F.

c) Una matriz diagonal D asociada a F y la base a la que está referida dicha matriz D.

2-A

5. Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual y $W = \{(x, y, z) | x - y = 0;\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

a) Determinar el complemento ortogonal, $W^{\perp}$, de W.

b) Expresar al vector $\overline{v} = (1,0,1)$ como la suma $\overline{v} = \overline{a} + \overline{b}$, donde $\overline{a} \in W$ y $\overline{b} \in W^{\perp}$.

6. Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual y el operador lineal $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$S(1,1,0) = (3,2,0)$$
$$S(0,-1,0) = (-2,0,1)$$
$$S(0,2,2) = (6,-2,4)$$

Determinar si S es un operador simétrico.