FACULTAD DE INGENIERÍA *DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS*
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS *SECCIÓN DE ÁLGEBRA*

SERIE TEMA 6: "MATRICES Y DETERMINANTES"
SEMESTRE: 2020-2

1- Para las siguientes matrices

$$A=\begin{bmatrix}5 & a & 7\\ 0 & 3 & 6\\ 2 & -1 & -3\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\ -2 & -1 & 0\\ b & 1 & 3\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -3 & 0 & c\\ 5 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

determinar los valores a,b,c que verifican la igualdad $A+3B=2C$

2.- Para las siguientes matrices

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

calcular, de ser posible, $AB, BA, BC, CB, ABC, CBA\ y\ BCA$.

3.- Para las siguientes matrices

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}b_{11} & 0 & 1\\ -1 & 2 & b_{23}\\ -2 & 3 & b_{33}\end{bmatrix}$$

Determinar los valores de $b_{11}, b_{23}\ y\ b_{33}$ que satisfacen la igualdad $AB=I$.

4.- Para las matrices

$$A=\begin{bmatrix}5 & -1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 0 & 2\\ -2 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Obtener el producto AB ¿Puede decirse que A es inversa de B ? ¿Por qué?

5.- Obtener, si existe, por medio del método de operaciones elementales, la inversa de las siguientes matrices

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&3&3&2\\2&4&3&3\\1&1&1&1\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&-3&-1\\1&-1&1\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1&1\\0&2-i\\3&2\end{bmatrix}$$

6.- Determinar para que valores de m la matriz $A=\begin{bmatrix}1&1&m\\m&0&-1\\6&-1&0\end{bmatrix}$ no admite matriz inversa

---

7.- Para qué valores de x la matriz $A=\begin{bmatrix}3&x&x\\1&-1&0\\3&-2&0\end{bmatrix}$ no admite matriz inversa

---

8.- Obtener la matriz que satisface la siguiente ecuación matricial

$$A^{-1}XB-B=-A^{-1}X$$

donde

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&2\end{bmatrix}\quad ;\quad B=\begin{bmatrix}-1&1\\2&1\end{bmatrix}$$

9.- Descomponer la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 9 & -5\\ 8 & 8 & 13\\ -3 & 10 & 5\end{bmatrix}$ en la suma de la matriz identidad, una matriz simétrica y otra matriz triangular superior

---

10.- Para la matriz triangular $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 8 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 1\end{bmatrix}$ determinar A^{-1}

11.- Sean las matrices $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & x\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2 & 8\\ 9 & 4x\end{bmatrix}$ y D, donde está última es de orden 2 y tal que $tr(D)=-6$. Determinar el valor de x si $tr(\mathrm{AB})=tr(\mathrm{C+D})$

12.- Por simple inspección obtener la inversa de las siguientes matrices diagonales

$$A=\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}-\frac{4}{5} & 0 & 0\\ 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\quad D=\begin{bmatrix}\frac{3}{11} & 0\\ 0 & \frac{12}{5}\end{bmatrix};\quad E=\begin{bmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

13.- Sea la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 0 & 30 \\ -1 & 0 & n-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -m \end{bmatrix}$$

Obtener el conjunto de valores de m y el conjunto de valores de n tal que A sea singular y $trA=3$.

14.- Si $A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, calcular $tr(A^2)$

15.- Construir dos matrices de 2x2, A y B, distintas tales que $tr(A)=tr(B)$

16.- Definir cuándo una matriz es triangular superior y al mismo tiempo triangular inferior

---

17.- Sea la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 0 & 30 \\ -1 & 0 & n-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -m \end{bmatrix}$$

Obtener el conjunto de valores de m y el conjunto de valores de n tal que A sea singular y $trA=3$.

18.- Calcular la matriz transpuesta de:

$$a)\ A=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 9 & 1\end{bmatrix};\quad b)B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix};\quad c)C=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & 2 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -2\\ 3 & 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix};\quad D=\begin{bmatrix}-2+3i & 8 & \frac{7}{12}\\ 0 & \frac{1}{4} & -2\\ \frac{3}{4} & 0 & -i\end{bmatrix}$$

19.- Obtener las matrices conjugadas de:

$$a)\ A=\begin{bmatrix}i & i\\ i & -i\end{bmatrix};\quad b)B=\begin{bmatrix}i & 1-i & 0\\ -i & 0 & 6\\ 7-5i & 8 & 9i\end{bmatrix};\quad c)C=\begin{bmatrix}4-6i & 3 & i\\ 0 & 1 & -2\\ 3i & 11 & \sqrt{11}i\end{bmatrix};\quad D=\begin{bmatrix}-2+3i & 8 & \frac{7}{12}\\ 0 & \frac{1}{4} & -2\\ \frac{3}{4} & 0 & -i\end{bmatrix}$$

20.- Obtener la matriz conjugada-transpuesta de cada una de las siguientes matrices.

$$a)\ A=\begin{bmatrix}i & i\\ i & -i\end{bmatrix};\quad b)B=\begin{bmatrix}i & 1-i & 0\\ -i & 0 & 6\\ 7-5i & 8 & 9i\end{bmatrix};\quad c)C=\begin{bmatrix}4-6i & 3 & i\\ 0 & 1 & -2\\ 3i & 11 & \sqrt{11}i\end{bmatrix};\quad D=\begin{bmatrix}-2+3i & 8 & \frac{7}{12}\\ 0 & \frac{1}{4} & -2\\ \frac{3}{4} & 0 & -i\end{bmatrix}$$

21.- Demostrar que toda matriz cuadrada multiplicada por su transpuesta es una matriz simétrica.

22.- Dada una matriz cuadrada A demostrar que $A-A^*$ es una matriz antihermitiana, 23.- Determinar si las siguientes matrices son hermitianas o antihermitianas.

$$A=\begin{bmatrix} -i & -5 & -2-i \\ 5 & 3i & -i \\ 2-i & -i & 0 \end{bmatrix} B=\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2+i \\ 5 & 3 & i \\ 2-i & -i & 0 \end{bmatrix} C=\begin{bmatrix} -i & 1+2i & 3-4i \\ -1+2i & 2i & 2i \\ -3-4i & 2i & 7i \end{bmatrix} D=\begin{bmatrix} 2 & -i & 2+i \\ i & 1 & -1-2i \\ 2-i & -1+2i & -4 \end{bmatrix}$$

24.- Obtener los valores de a y b para que la matriz **A** sea una matriz ortogonal

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & -\frac{2}{\sqrt{6}} & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

25.- Para las siguientes matrices

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} i & -1 & 3 \\ -i & i & 4i \\ -2i & 2+i & -2i \end{bmatrix}$$

a) Verificar que $tr(AB)=tr(BA)$

b) Verificar que $(A+B)^T = A^T + B^T$

c) Verificar que $(AB)^T = B^T A^T$

d) Obtener una matriz antisimétrica a partir de A y A^T

e) Verificar que $\overline{A+C}=\overline{A}+\overline{C}$

f) Verificar que $(BC)^* = C^* B^*$

g) Obtener una matriz hermitiana a partir de C y C^*

h) Clasificar a la matriz B de acuerdo a su simetría respecto a la diagonal principal

26.- Sabiendo que $|A| = 5$, calcular los determinantes de las matrices *B* y *C*.

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{bmatrix}$$

27.- Si el valor del determinante $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{bmatrix} = 25$. Calcular el valor de $B = \begin{bmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{bmatrix}$

28.- Demostrar sin desarrollar que los siguientes determinantes valen cero.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & 3a & 4a \\ a & 5a & 6a \\ a & 7a & 8a \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix}$$

29.- Aplicando las propiedades de los determinantes, calcular:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{bmatrix}$$

30.- Calcular los determinantes de Vandermonde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{bmatrix}$$

31.- Calcular el valor del siguiente determinante por medio de cofactores.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 5 & 7 & 2\\5 & 0 & 4 & 3\\9 & 0 & 5 & 0\\3 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

32.- Obtener por medio de la Regla de Sarrus el determinante de la siguiente matriz

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\-4 & 5 & 2\\1 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

33.- Calcular el determinante de la siguiente matriz por medio de cofactores.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & -1\\0 & -1 & 0 & 3\\-2 & 1 & 1 & -2\\3 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

34.- Sea la matriz $A=\begin{bmatrix}5 & 9 & 3\\9 & 3 & 0\\3 & 4 & 0\end{bmatrix}$

a) Obtener el determinante de A
b) Intercambiar el renglón 1 por el renglón 3 y obtener el determinante de la matriz
c) Multiplicar por 3 la columna 2 y calcular el determinante de la matriz
d) Sumar el renglón 2 al renglón 3 y calcular el determinante de la matriz
e) Multiplicar toda la matriz por 2 y calcular su determinante
f) Eliminar el renglón 2 de la matriz y en su lugar repetir el renglón 3 y calcular el determinante de la matriz
g) Sustituir la columna 3 por una columna de ceros y calcular el determinante de la matriz

35.- Calcular el determinante de la matriz *A* por el método de condensación.

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

36.- Obtener el determinante de la siguiente matriz aplicando reiteradamente el método de condensación.

$$M=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

37.- Sea la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtener:

a) el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que el determinante de A sea 5.

b) la traza de la matriz A.

38.- Sea la matriz

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \\ a & a & a & a \end{bmatrix}$$

Obtener los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el determinante de A sea igual a cero.

39.- Sea la matriz $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{bmatrix}$, el $\det[A]=-2$. Calcular el valor de la siguiente expresión.

$$\left|2A^{-1}A^{T}\right| + \begin{vmatrix} 2a & c & 3b \\ 2d & f & 3e \\ 2g & m & 3h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ d & e & e \\ g & h & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

40.- Calcular la matriz inversa por medio de la adjunta y resolver el sistema de ecuaciones aplicando la fórmula $X = A^{-1}B$

$$\begin{array}{l} -x+3y-2z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ 2x+2y-z=-1 \end{array} \Rightarrow Si\ A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

41.- Sea la matriz

$$F=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Obtener la matriz adjunta de F
b) A partir de la adjunta de F determinar el valor de su determinante
c) Obtener la inversa de F a partir de su adjunta y su determinante
d) A partir de la definición de adjunta de una matriz, explicar por qué las matrices cuyo determinante vale cero, no tienen inversa.

42.- Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}x\\ y\\ -2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-x\\ 2\\ z\end{pmatrix}$$

a) Obtener la inversa de la matriz A utilizando el método de la adjunta.
b) Determinar los valores de $x,\ y\ e\ z$ para los cuales se cumple que $AB=C$.

43.- Haciendo uso de la matriz $A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}$ demostrar que

$$Si\ \det \text{A}\neq 0,\ entonces\ A\left[AdjA\right]=\left(\det A\right)I_n=\left(\det A\right)AA^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{A\left[Adj\ A\right]}{\left(\det A\right)A}=\frac{Adj\ A}{\det A}\Rightarrow A^{-1}=\frac{Adj\ A}{\det A}$$

$$que\ \ A\left[Adj\ A\right]=\left(\det A\right)I_n\Rightarrow I_n=\frac{A\left[Adj\ A\right]}{\left(\det A\right)}$$

44.- Resolver el sistema de ecuaciones lineales usando Regla de Cramer

$$\begin{aligned}2x-3y+z&=5\\ -x+y-2z&=3\\ x+2y-4z&=9\end{aligned}$$

---

45. Resolver el sistema de ecuaciones lineales usando la regla de Cramer

$$\begin{aligned}2x-3y+4z&=1\\ x+6z&=0\\ 3x-2y&=5\end{aligned}$$

46.- Resolver el sistema de ecuaciones lineales usando la regla de Cramer

$$\begin{aligned} x+y+z+w&=0\\ y-z&=0\\ x+2z&=1 \end{aligned}$$

47.- Obtener la matriz X que satisface la ecuación matricial

$$ABX-\left(\frac{1}{297}\det\left(AB\right)\,trC^T\right)D=XC^T$$

donde

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\3&-1&-4\\-1&0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&2&5\\2&-1&-1\\1&1&4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\-1&3&-1\\0&1&4\end{pmatrix}\quad y\ \ D=diag\left(-1\quad 2\quad 3\right)$$

48.- Obtener la matriz X que satisface la ecuación matricial

$$\left(trA\right)X+\frac{1}{\det B}\left(Adj\,B\right)A^{*}=B^{-1}AX-CX$$

donde

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\i&-1\end{bmatrix},\quad B^{-1}=\begin{bmatrix}2&0\\0&-3\end{bmatrix}\quad y\quad C=\begin{bmatrix}1&0\\-3i&2\end{bmatrix}$$

49.- Determinar la matriz X para la que se verifica:

$$A^2X=\frac{1}{2}(A+BC^T)$$

donde:

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\ ,\quad B=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&3&1\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}-1&1&6\\3&1&2\end{pmatrix}$$

50.- Si se sabe que D es una matriz ortogonal, determinar la matriz X que satisface la ecuación matricial

$$(DX^{-1})^{-1} + (\det \bar{B})C = -XD^* + i(trA)I$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 4i & 3+5i \\ 2 & -i \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

51.- Obtener la matriz X que satisface la siguiente ecuación matricial

$$A\left(B^T X\right)^T - C^* = \left(\det B\right)A^2 - X^T BA$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} -1 & i \\ 0 & -8i \end{bmatrix}$$

52.- Obtener la matriz X que satisface la ecuación matricial

$$B^T AB + \frac{tr(C)}{\det\left(A^{-1}\right)} X^T = C$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2i & i \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} 1+i & i \\ i & -i \end{bmatrix}$$

53.- Obtener la matriz X que satisface la ecuación matricial

$$A^* X = A^{-1}B + \det\left(A\right)I$$

donde A es una matriz ortogonal y

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

54.- Determinar la matriz X que satisface la ecuación

$$XA^T + 3B = \left(\det\left(C\right)\right)A - \left(tr\left(B\right)\right)C^*$$

si,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad y \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

55.- Determinar la matriz S que satisface la ecuación

$$C^T S = \left[\det\left(2C\right)\right]\left(AB\right)^{-1} S - D$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & -2+i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 22 \end{pmatrix}.$$