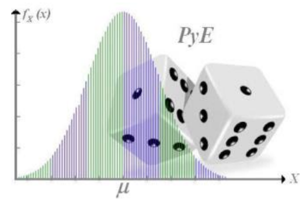
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
PRIMER EXAMEN FINAL



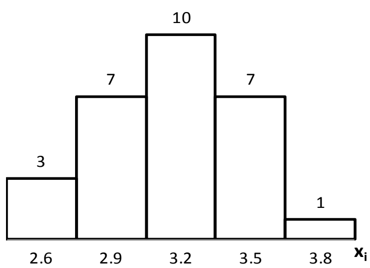
SEMESTRE 2015-1 **TIPO 1**

DURACIÓN MÁXIMA 2.0 HORAS **26 DE NOVIEMBRE DE 2014**

NOMBRE____

Apellido paterno **Apellido materno** **Nombre (s)** **Firma**

1. Un hospital elaboró el siguiente histograma de frecuencias tomando como base una muestra aleatoria de los pesos (en kg.) de los bebés recién nacidos en ese hospital.



Con base en la información proporcionada en la gráfica:

a) Obtenga el peso promedio de la muestra.
b) La moda de la muestra.
c) La varianza de la muestra.

(15 Puntos)

Resolución.

a) Peso promedio de la muestra= media= $\bar{x}$ $\quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i\ f_i$

Por lo tanto, el peso promedio de la muestra es: $\bar{x} = \frac{(2.6)(3)+(2.9)(7)+(3.2)(10)+(3.5)(7)+(3.8)}{28} = 3.15\ kg.$

b) La moda es igual al valor de la marca de clase que presenta mayor frecuencia, por lo tanto la moda es igual a 3.2 kg.

c) La varianza de la muestra es igual a: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2\ fi$

Por lo tanto, se tiene: $s^2 = \frac{(2.6-3.15)^2+(2.9-3.15)^2+(3.2-3.15)^2+(3.5-3.15)^2+(3.8-3.15)^2+}{27} = 0.098$

2. Con base en varios estudios geológicos una compañía ha clasificado, de acuerdo a la posibilidad de descubrir petróleo, las formaciones geológicas en tres tipos. La compañía pretende perforar un pozo en un determinado sitio al que se le asignan las probabilidades de 0.35, 0.40 y 0.25 para los tres tipos de formaciones respectivamente. De acuerdo con la experiencia, se sabe que el petróleo se encuentra en un 40% de formaciones del tipo I, en un 20% de formaciones del tipo II y en un 30% de formaciones del tipo III.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía encuentre petróleo en ese sitio?
   b) Si la compañía no descubre petróleo en ese sitio, determinar la probabilidad de que exista una formación del tipo II.
   (15 Puntos)

Resolución.

a) Sean los eventos:

A={x|x es una formación del tipo 1}
B={x|x es una formación del tipo 2}
C={x|x es una formación del tipo 3}
D={x|x es un sitio con petróleo}

Los datos son:

Los datos son:	P(A)=0.35	P(D|A)=0.4
	P(B)=0.40	P(D|B)=0.2
	P(C)=0.25	P(D|C)=0.3

La probabilidad de encontrar petróleo, considerando los tres tipos de formaciones geológicas es:
P(D)=P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)=0.35(0.4)+0.4(0.2)+0.25(0.3)=0.295

b) Se declara el siguiente evento: D^c={x|x es un sitio sin petróleo}

Entonces se tiene: $P(D^c\,|A)=0.6$
$P(D^c\,|B)=0.8$
$P(D^c\,|C)=0.7$

La probabilidad solicitada es entonces $P(B|\,D^c)$.

$$\mathrm{P(B|D')} = \frac{\mathrm{P(B)P(D^c|B)}}{\mathrm{P(A)P(D^c|A)+P(B)P(D^c|B)+P(C)P(D^c|C)}} = \frac{0.4(0.8)}{0.35(0.6)+0.4(0.8)+0.25(0.7)} = 0.4539$$

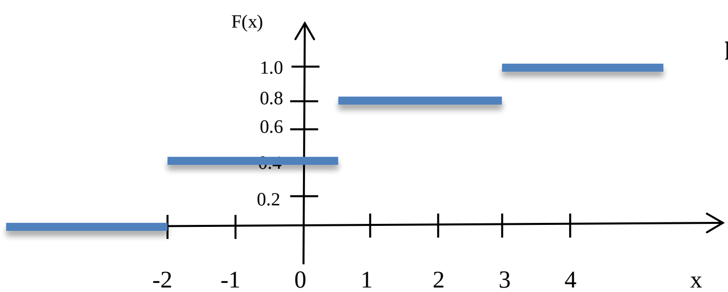
3. Sea una variable aleatoria definida por su función de distribución acumulativa:

$$F\,(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.4 & -2 \le x < 0.5 \\ 0.8 & 0.5 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

(a) Graficar F(x) y construir la función de probabilidad de esta variable.
(b) Calcular E(X).
(c) Calcular P(-2≤X≤0.5) (10 Puntos)

Resolución.

a)



$$\mathrm{p}\,(-2) = \mathrm{P}\,(\mathrm{x} = -2) = \mathrm{F}\,(-2) - \mathrm{F}\,(-2^-) = 0.4 - 0 = 0.4$$
$$\mathrm{p}\,(0.5) = \mathrm{P}\,(\mathrm{x} = 0.5) = \mathrm{F}\,(0.5) - \mathrm{F}\,(0.5^-) = 0.8 - 0.4 = 0.4$$
$$\mathrm{p}\,(3) = \mathrm{P}\,(\mathrm{x} = 3) = \mathrm{F}\,(3) - \mathrm{F}\,(3^-) = 1 - 0.8 = 0.2$$

En forma tabular:

x	-2	0.5	3
P(X)	0.4	0.4	0.2

b) $\mathrm{E[X]} = (-2 * 0.4) + (0.5 * 0.4) + (3 * 0.2) = 0$

c) P(-2≤X≤0.5)=0.4+0.4=0.8

4. Un ingeniero viaja diariamente desde su domicilio en Cd. Satélite, hasta su oficina en el centro de la Cd. de México. En promedio el viaje en un sentido le lleva 24 minutos, con una desviación estándar de 3.8 minutos. Suponga que la distribución de los tiempos de viaje es normal.

   a) Si sale de su domicilio a las 8:35 y se sirve café en la oficina de 8:50 a 9:00 ¿Cuál es la probabilidad de que se pierda el café?
   b) Determine la probabilidad de que 2 de los 3 viajes siguientes tome por lo menos ½ hora.

(15 Puntos)

Resolución.

a) Para que se pierda el café, debe llegar a su oficina de las 9.00 hrs. En adelante, por lo tanto de su domicilio a su trabajo tendrá que hacer más de 25 min.

$Z = \frac{25-24}{3.8} = 0.263$ P(X≥25)= $P(Z \geq 0.263) = 1 - 0.6026 = 0.3974$

b) El que 2 de los 3 viajes siguientes tome por lo menos ½ hora.
Se obtiene la probabilidad de que el viaje tome por lo menos ½ hora:
$Z = \frac{30-24}{3.8} = 1.58$ P(X≥30)= $P(Z \geq 1.58) = 1 - 0.9429 = 0.0571$

Si A es el evento un viaje toma por lo menos ½ hora, entonces la probabilidad los eventos que cumplen con lo que se solicita es:

$P(A \cap A^c \cap A \cup A \cap A \cap A^c \cup A^c \cap A \cap A) = 3P(A \cap A^c \cap A) = 3P(A)P(A^c)P(A)$

Considerando la probabilidad de que tome más de media hora, P(A)=0.0571, por lo tanto
$P(A^c)=1- P(A) = 1- 0.0571=0.9429$
$3P(A)P(A^c)P(A)=3(0.0571)(0.9429)(0.0571)=0.0092$

5. Suponga que el porcentaje X de alumnos y Y de alumnas que han concluido un examen de probabilidad y estadística se puede describir mediante la función densidad de probabilidad conjunta:

$$f(x, y)= \begin{cases} 8xy & \text{para } 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Obtenga la función marginal de X.
b) Calcule la probabilidad de que menos de 1/8 de las alumnas que participan en este examen lo hayan terminado si se sabe que exactamente ½ de los alumnos lo hicieron.
c) Determine el coeficiente de correlación e interprételo. Considerando

$$E(X) = \frac{4}{5}\,,\; Var(X) = \frac{2}{75},\;\; f_Y(y) = 4y(1-y^2)$$ (15 Puntos)

Resolución.

a) $f(x) = \int_0^x 8xydy = 4x^3$ por lo tanto: $f(x) = 4x^3$ $,\, para\;\; 0 < x < 1$

b) Primero se debe obtener la función de probabilidad condicional de Y dado X:

$$f_{(Y|X)}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{8xy}{4x^3} = \frac{2y}{x^2} \quad \text{para } 0<y<x$$

Sustituyendo en $2y/x^2$ el valor de $x= \frac{1}{2}$ se obtiene $f_{(Y|X)}(y|x) = 8y$

$$P(y < \frac{1}{8}\;|x = \frac{1}{2}) = \int_0^{1/8} 8ydy = \frac{1}{16}$$

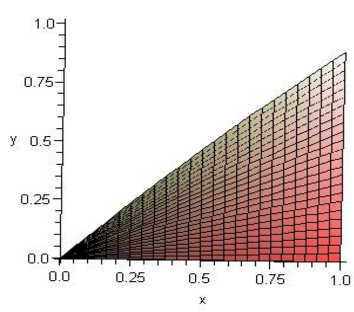
c) COV(XY)= $E(XY) - E(X)E(Y)$

$E(XY) = \int_0^1 \int_y^1 xy\,8xydxdy = \frac{4}{9}$ $E(X) = \int_0^1 x4x^3dx = \frac{4}{5}$ $E(Y) = \int_0^1 y[4y(1-y^2)]dy = \frac{8}{15}$

Por lo tanto: COV(XY)= $\frac{4}{9} - \frac{4}{5}(\frac{8}{15}) = \frac{4}{225}$

$$Var(Y) = \int_0^1 y^2(4y(1-y^2))dy - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{11}{225}$$

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(XY)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = 0.4923$$



6. El promedio de las personas que ingresan a una librería y compran, es del el 25%. El comportamiento de las compras obedece a una distribución binomial. Si en un día entraron 80 clientes, calcule la probabilidad de que se hagan al menos 28 compras.

(15 Puntos)

Resolución.

Si se tiene que las compras se distribuyen de manera binomial, se tiene:

p=éxito=el cliente compra=0.25; q=fracaso=el cliente no compra=0.75, entonces la media y desviación estándar serán:

$\mu = np = 80(0.25) = 20$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{80(0.25)(0.75)} = 3.87$

Entonces la probabilidad pedida es $P(x \geq 28)$. $Z = \frac{28-20}{3.87} = 2.07$

Utilizando tablas de la distribución normal estándar se determina la probabilidad.

$P(x \geq 28) = P(Z \geq 2.07) = 1 - 0.9808 = 0.0192$

7. Los resultados de las estaturas (en centímetros) y pesos (en kilogramos), de 10 jugadores de baloncesto de un equipo, van de 186 a 205 cm y de 85 a 103 kg respectivamente.

Los resultados de las sumas de los datos obtenidos, se muestran a continuación:

	Estaturas	Pesos	$(\text{Estaturas})^2$	$(\text{Pesos})^2$	(Estaturas)(Pesos)
Sumas:	1950	921	380618	85255	179971

A partir de los datos anteriores se estimó la siguiente recta de regresión lineal la cual relaciona el peso de un jugador en función de su estatura: $\hat{y} = -107.14 + 1.022x$

Se desea saber si realmente la relación que existe entre el peso y la estatura de los jugadores es aproximadamente lineal. Con base en la información proporcionada, diga si existe o no relación lineal entre el peso y la estatura de un jugador y justifique su respuesta.

(15 Puntos)

Resolución:

La relación que existe entre el peso de una persona y su estatura se considera lineal, si el coeficiente de correlación del modelo de regresión lineal obtenido, es cercano igual a uno, por lo tanto, se debe calcular este coeficiente y observar su valor para saber si el peso y la estatura de un jugador se relacionan de forma lineal.

El coeficiente de correlación, está definido por:

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}SS_{yy}}}$$

donde:

$$SS_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \ \sum_{i=1}^{n} x_i}{10} = 179971 - \frac{(1950)(921)}{10} = 376$$

$$SS_{xx} = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{10} = 380618 - \frac{(1950)^2}{10} = 368$$

$$SS_{yy} = \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{10} = 85255 - \frac{(921)^2}{10} = 430.9$$

Sustituyendo en r, se tiene: $r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}SS_{yy}}} = \frac{376}{\sqrt{(368)(430.9)}} \approx 0.944$

Como el valor de r es cercano a 1, entonces se puede decir que si existe relación lineal positiva entre el peso de los jugadores y su estatura, es decir, a mayor estatura, el valor del peso del jugador, será también mayor.