UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
SEGUNDO EXAMEN FINAL
RESOLUCIÓN

SEMESTRE 2013 - 1 **TIPO 1**
DURACIÓN MÁXIMA 2.0 HORAS **6 DE DICIEMBRE DE 2012**

NOMBRE____
Apellido paterno **Apellido materno** **Nombre (s)** **Firma**

Problema 1
La siguiente distribución representan los montos por concepto de carga, adeudados a una compañía americana de 35 facturas.

Intervalos de Clase	f_i
0.00 — 0.99	3
1.00 — 1.99	12
2.00 — 2.99	12
3.00 — 3.99	5
4.00 — 4.99	2
5.00 — 5.99	1

Calcular el coeficiente de variación y coeficiente de simetría. Interpretar los resultados.
15 Puntos
Resolución

Clase	Intervalos de Clase	Fronteras de Clase	Marcas de Clase x_i	Frecuencia Absoluta f_i	$x_i f_i$	$f_i(x-\bar{x})^2$	$f_i(x-\bar{x})^3$
1	0.00-0.99	-0.005-0.995	0.495	3	1.485	10.031	-18.342
2	1.00-1.99	0.995-1.995	1.495	12	17.94	8.238	-6.826
3	2.00-2.99	1.995-2.995	2.495	12	29.94	0.353	0.060
4	3.00-3.99	2.995-3.995	3.495	5	17.475	6.861	8.037
5	4.00-4.99	3.995-4.995	4.495	2	8.99	9.430	20.477
6	5.00-5.99	4.995-5.995	5.495	1	5.495	10.058	31.898
			Sumas:	35	81.325	44.971	35.304

El coeficiente de variación se define como, siendo adimensional, de forma $CV = \frac{S_{n-1}}{X}$

sustituyendo, la media y la desviación estándar que se definen como

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} f_i x_i \quad \text{y} \quad S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m} f_i\left(x-\bar{x}\right)^2$$

entonces

$$\bar{X} = \frac{1}{35}\sum_{i=1}^{6} f_i x_i = \frac{1}{35}(81.325) = 2.324 \quad \text{y} \quad s_{n-1}^2 = \frac{1}{34}\sum_{i=1}^{6} f_i\left(x-\bar{X}\right)^2 = \frac{1}{34}(44.971) = 1.323$$

$cv = \frac{\sqrt{1.323}}{2.324} = 0.495$ entonces 49.5%

El coeficiente de simetría (o asimetría) es

$$a_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^3}{\left(\sqrt{S_{n-1}^2}\right)^3}$$

sustituyendo, se tiene que

$$a_3 = \frac{\frac{1}{35}\left(35.304\right)}{\left(\sqrt{1.323}\right)^3} = \frac{1.009}{1.522} \approx 0.663$$

El coeficiente de sesgo es positivo, la muestra tiene sesgo a la derecha.

Problema 2

Una empresa comercializadora de artículos electrónicos está considerando comercializar un nuevo modelo de pantalla LCD. En el pasado, el 40% de los equipos de pantallas que la empresa lanzó al mercado tuvieron éxito y el 60% no fueron exitosos. Antes de lanzar al mercado el equipo de pantallas LCD, el departamento de investigación de mercados realiza un extenso estudio y entrega un reporte, ya sea favorable o desfavorable. En el pasado, el 80% de los equipos de pantalla LCD exitosas habían recibido un reporte de investigación favorable y el 30% de los equipos de pantalla LCD no exitosos habían recibido un reporte de investigación favorable. Para los nuevos modelos de pantallas LCD bajo consideración, el departamento de investigación de mercado ha entregado un reporte favorable, ¿cuál es la probabilidad de que el equipo de pantalla LCD tenga éxito en el mercado?

15 Puntos

Resolución

Sean los eventos

A representa un equipo de pantalla exitoso en el mercado.

B representa el reporte del Departamento de Mercadotecnia es favorable.

Del enunciado

$P\left(A\right) = 0.4$

$P\left(\bar{A}\right) = 0.6$

$P\left(B \middle| A\right) = 0.8$

$P\left(B \middle| \bar{A}\right) = 0.3$

de acuerdo con los eventos, se pide calcular $P\left(A \middle| B\right)$, del Teorema de Bayes, se tiene

$$P\left(A \middle| B\right) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \frac{P\left(A\right)P\left(B \middle| A\right)}{P\left(B\right)} = \frac{P\left(A\right)P\left(B \middle| A\right)}{P\left(A\right)P\left(B \middle| A\right) + P\left(\bar{A}\right)P\left(B \middle| \bar{A}\right)}$$

sustituyendo

$$P\left(A \middle| B\right) = \frac{\left(0.4\right)\left(0.8\right)}{\left(0.4\right)\left(0.8\right) + \left(0.6\right)\left(0.3\right)} = \frac{0.32}{0.5} = 0.64$$

Es decir, la probabilidad de que el equipo de pantalla LCD tenga éxito en el mercado, dado que se recibió un reporte favorable es de 0.64

Problema 3

Sea una variable aleatoria discreta con función de probabilidad dada en forma tabular por

X	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	0.10	0.20	0.30	0.25	0.15

a) Obtener una tabla de distribución de probabilidad de la siguiente variable aleatoria $Y = X^3 - 4X^2 + 10$

b) Obtener la media y la variancia de la variable Y

15 Puntos

Resolución

a) Al sustituir los valores de X en la función Y, se obtienen los correspondientes valores como

$$Y(0) = X^3 - 4X^2 + 10 \Rightarrow Y(0) = 10$$

$$Y(1) = X^3 - 4X^2 + 10 \Rightarrow Y(1) = 1^3 - 4(1)^2 + 10 = 7$$

$$Y(2) = X^3 - 4X^2 + 10 \Rightarrow Y(2) = 2^3 - 4(2)^2 + 10 = 2$$

$$Y(3) = X^3 - 4X^2 + 10 \Rightarrow Y(3) = 3^3 - 4(3)^2 + 10 = 1$$

$$Y(4) = X^3 - 4X^2 + 10 \Rightarrow Y(4) = 4^3 - 4(4)^2 + 10 = 10$$

La función de probabilidad en forma tabular está dada por

Y	1	2	7	10
$f_Y(y)$	0.25	0.30	0.20	0.25

b) El promedio se define como $E(Y) = \sum_{\forall y} y\, f_Y(y)$

al sustituir se tiene

$$E(Y) = 1(0.25) + 2(0.30) + 7(0.20) + 10(0.25)$$

$$E(Y) = 0.25 + 0.6 + 1.4 + 2.5$$

$$E(Y) = 4.75$$

La variancia se define por

$$Var(Y) = \sum_{\forall y} (Y - \mu)^2\ f_Y(y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

al sustituir se tiene

$$Var(Y) = (1 - 4.75)^2\ (0.25) + (2 - 4.75)^2 (0.30) + (7 - 4.75)^2 (0.20) + (10 - 4.75)^2 (0.25) = 13.687$$

Problema 4

Una muestra aleatoria de 10 observaciones se toma de una población normal con variancia $\sigma^2 = 42.5$ Calcular la probabilidad aproximada de obtener una desviación estándar muestral entre 3.14 y 8.94

10 Puntos

Resolución

Sea pide calcular $P(3.14 < S < 8.94)$ entonces con n=10 observaciones

$$P\left((3.14)^2 < S^2 < (8.94)^2\right) \approx P\left(\frac{9(3.14)^2}{42.5} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{9(8.94)^2}{42.5}\right) = P\left(2.088 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < 16.925\right) = P\left(2.088 < \mathrm{X}^2 < 16.925\right)$$

de tablas de la distribución Ji-cuadrada con nueve grados de libertad, entonces

$$P\left((3.14)^2 < S^2 < (8.94)^2\right) = P\left(2.088 < \mathrm{X}^2 < 16.925\right) = 0.99 - 0.05 \approx 0.94$$

Problema 5

Si se ajusta correctamente la sensibilidad de un reflector activado por movimiento, el número promedio de veces por semana que lo activan ardillas y otros pequeños animales es de 0.5

a) ¿Cuál es el número promedio de veces que esperaría su activación por dichos animales en dos semanas?

b) Si ocurriera la activación por estos animales al menos cinco veces en dos semanas, ¿supondría que es necesario ajustar la sensibilidad del reflector? Justifique su respuesta con base a la probabilidad.

15 Puntos

Resolución

a) Sea X la variable aleatoria que representa el número de activaciones en una semana.

$$X \sim Poisson\left(\lambda = \frac{1}{2} \; \frac{\text{número de activaciones}}{\text{una semana}}\right)$$

Se sabe que la media y la variancia de la variable aleatoria con distribución de Poisson es igual con el parámetro lambda, entonces para dos semanas y debido al proceso de Poisson:

Sea Y la variable aleatoria que representa el número de activaciones en dos semanas, es

$$Y \sim Poisson\left(\lambda = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \; \frac{\text{número de activaciones}}{\text{dos semanas}}\right)$$

El promedio de activaciones para dos semanas es el valor esperado, entonces

$$E(Y) = \lambda = 1$$

Lo que significa que se espera una activación en dos semanas, en promedio.

b)

La activación por estos animales al menos cinco veces en dos semanas, la probabilidad a calcular es

$$P(Y \geq 5) = P(Y = 5) + P(Y = 6) + \ldots +$$

$$P(Y \geq 5) = 1 - P(Y < 5) = 1 - \left[P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4)\right]$$

$$P(Y \geq 5) = 1 - P(Y < 5) = 1 - \sum_{y=0}^{4} \frac{e^{-1} 1^y}{y!} = 1 - e^{-1} \sum_{y=0}^{4} \frac{1}{y!}$$

$$P(Y \geq 5) = 1 - e^{-1}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right] = 1 - e^{-1}\left[\frac{65}{24}\right] \approx 0.0036$$

La probabilidad de que se active el reflector al menos cinco veces es poco probable, tiene mayor probabilidad que se active a lo más en cuatro veces, por lo cual se requiere un ajuste.

Problema 6

Dos directivos acordaron encontrarse en un restaurante entre las 2:00 y 3:00 p.m. para comer y firmar el acuerdo de su alianza estratégica. Considérese que X es la hora de llegada del directivo A y Y es la hora de llegada del directivo B. Además, supóngase que X y Y son independientes y cada una está distribuida uniformemente en el intervalo [2,3].

a) Obtener la función de densidad de probabilidad conjunta de X y Y

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos directivos lleguen entre las 2:00 y las 2:30 p.m.?

c) Si a las 2:00 p.m., el primer directivo en llegar es B y esperará en el restaurante 15 minutos antes de irse, ¿cuál es la probabilidad de que ambos directivos coman juntos?

15 Puntos

Resolución

a) Del enunciado X y Y se distribuyen uniformemente en [2,3], por lo tanto sus funciones de densidad están dadas por

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & ; \quad 2\le x\le 3\\ 0 & ; \quad en\ otro\ caso\end{cases}$$

y

$$f_Y(y)=\begin{cases}1 & ; \quad 2\le y\le 3\\ 0 & ; \quad en\ otro\ caso\end{cases}$$

se sabe que son independientes, entonces debe cumplir con alguna de las condiciones siguientes

$f_{XY}(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$

o bien,

$f_{X|Y}(X|Y)=f_X(x)$

o bien

$f_{Y|X}(Y|X)=f_Y(y)$

al usar las funciones marginales, se tiene

$f_{XY}(x,y)=(1)(1)=1$

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}1 & ; \quad 2\le x\le 3\ , \quad 2\le y\le 3\\ 0 & ; \quad en\ otro\ caso\end{cases}$$

b) Se pide calcular la probabilidad de que lleguen entre las 2:00 y las 2:30, esto es $P(X<2.5\ ,\ Y<2.5)$

por lo tanto

$$P(X<2.5\ ,\ Y<2.5)=\int_2^{2.5}\int_2^{2.5}dxdy=\int_2^{2.5}[x]\Big|_2^{2.5}dy=\int_2^{2.5}[2.5-2]\,dy=0.5\int_2^{2.5}dy=$$

$$=0.5[y]\Big|_2^{2.5}=0.5(2.5-2)=0.5(0.5)=0.25$$

c) La probabilidad de que ambos directivos coman juntos, dado que B llegó a las 2:00 p.m. y solo esperará 15 minutos, esto es $P(X\le 2.5\mid Y=2)$, entonces primero hay que determinar la función condicional dado un valor

$$f_{X|Y}(X\mid Y)=\begin{cases}\dfrac{f_{XY}(x,2)}{f_Y(2)} & ; \quad f_Y(y)>0\\ 0 & ; \quad en\ otro\ caso\end{cases}$$

sustituyendo

$$f_{X|Y=2}(X\mid Y=2)=\begin{cases}\dfrac{1}{1} & ; \quad 2<x<3\\ 0 & ; \quad en\ otro\ caso\end{cases}$$

por lo que la probabilidad es

$$P(X\le 2.5\mid Y=2)=\int_2^{2.25}dx=(x)\Big|_2^{2.25}=2.25-2=0.25$$

por independencia, se sabe que

$f_{X|Y}(X|Y)=f_X(x)$

entonces al calcular la función marginal de $f_X(x)$, se tiene

$$P(X\le 2.5\mid Y=2)=\int_2^{2.25}dx=(x)\Big|_2^{2.25}=2.25-2=0.25$$

Problema 7

Las estaturas (en centímetros) y pesos (en kilogramos), de 10 jugadores de baloncesto de un equipo, algunos se muestran en la tabla.

Estatura (x)	186	189		192	193		198	201		205
Pesos (y)	85		86	90		91	93		100	101

se sabe que

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
Sumas:	1950	921	380618	85255	179971

a) Estimar la recta de regresión por el método de mínimos cuadrados de los pesos en función de la estatura.

b) Calcular el coeficiente de determinación e interpretar el resultado.

c) Obtener el peso estimado de un jugador que mide 208 cm.

15 Puntos

Resolución

a) Como el coeficiente de determinación se utiliza como medida de eficacia de la regresión, éste se calculará a partir del cuadrado del coeficiente de correlación.

Las medias son

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} X_i \qquad \text{y} \qquad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} Y_i$$

sustituyendo

$$\overline{x} = \frac{1}{10}(1950) = 195 \qquad \text{y} \qquad \overline{y} = \frac{1}{10}(921) = 92.1$$

Los parámetros y el modelo, son

$$\hat{y} = \hat{\beta}_1 x + \hat{\beta}_0$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i \sum_{i=1}^{10} y_i}{10}}{\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)^2}{10}} = \frac{179971 - \frac{(1950)(921)}{10}}{380618 - \frac{(1950)^2}{10}} = \frac{376}{368} \approx 1.022$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x}$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x} = 92.1 - \left(\frac{376}{368}\right)(195) \approx -107.139$$

por lo tanto el modelo está dado por $\hat{y} = 1.022\, x - 107.139$

b) Para determinar si el modelo es válido debe obtenerse el coeficiente de determinación.

El coeficiente de correlación, está definido por

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}\, SS_{yy}}}$$

$$SS_{xx}=\sum_{i=1}^{10}x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{10}x_i\right)^2}{10}=380618-\frac{(1950)^2}{10}=368$$

$$SS_{yy}=\sum_{i=1}^{10}y_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{10}y_i\right)^2}{10}=85255-\frac{(921)^2}{10}=430.9$$

$$SS_{xy}=\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-\frac{\sum_{i=1}^{10}x_i\sum_{i=1}^{10}y_i}{10}=179971-\frac{(1950)(921)}{10}=376$$

sustituyendo

$$r=\frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}\,SS_{yy}}}=\frac{376}{\sqrt{(368)(430.9)}}\approx 0.944$$

entonces el coeficiente de determinación es

$$r^2=R^2=\frac{SS_{xy}^2}{SS_{xx}SS_{yy}}=\frac{(376)^2}{(368)(430.9)}\approx 0.892$$

Del resultado anterior, se puede observar y concluir, que el coeficiente de determinación es $r^2\approx 0.892$, esto es, 89.2 % y está poco cercano al 100%, por lo que se considera que el modelo lineal es adecuado para estos datos.

c) Se debe considerar la estatura del jugador como variable x, y el peso como y, entonces la ecuación de regresión que se calculó es

$\hat{y}=1.022\,x-107.139$

pero la estimación es para un valor fuera del intervalo, por lo que, es incorrecto hacer la estimación de un jugador que mide 208 cm.