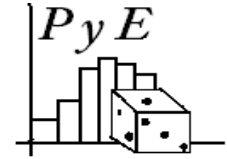




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
SEGUNDO EXAMEN FINAL
RESOLUCIÓN



SEMESTRE 2010-1
DURACIÓN MÁXIMA 2.5 HORAS

TIPO 1
DICIEMBRE 8 DE 2009

NOMBRE _____

1. La siguiente información es el resultado de las calificaciones obtenidas por un grupo de 30 estudiantes de probabilidad y estadística.

2	4	6	9	7	6	9	8	10	2
4	10	9	3	4	7	6	5	5	7
9	8	4	5	2	10	7	6	5	4

- a) Completar la tabla de frecuencias considerando los datos arriba citados.

Clase	Calificaciones en límites	Calificaciones en intervalos	Marcas de clase x_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa f_i^*	Frecuencia acumulada absoluta F_i	Frecuencia acumulada relativa F_i^*
1		-					
2		-					
3		-					
4		-					
5		-					

Con base en los datos de la tabla anterior contesta las siguientes preguntas:

- b) ¿Cuál es el rango o recorrido de los datos agrupados? ¿Cuál es el ancho de los límites?
 c) ¿Cuál es el promedio de calificaciones del grupo?
 d) ¿Entre qué valores se encontrarán la mayoría de las calificaciones de este grupo (desviación estándar)?
 e) ¿Qué tipo de simetría tiene este modelo? ¿Qué tipo de curtosis tiene este modelo?

24 Puntos

Resolución

- a) La Distribución de frecuencias queda como:

Clase	Calificaciones en límites	Calificaciones en intervalos	Marcas de clase x_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa f_i^*	Frecuencia acumulada absoluta F_i	Frecuencia acumulada relativa F_i^*
1	2 - 3	1.5 - 3.5	2.5	4	0.133	4	0.133
2	4 - 5	3.5 - 5.5	4.5	9	0.3	13	0.433
3	6 - 7	5.5 - 7.5	6.5	8	0.267	21	0.7
4	8 - 9	7.5 - 9.5	8.5	6	0.2	27	0.9
5	10 - 11	9.5 - 11.5	10.5	3	0.1	30	1
				30			

- b) El rango de los datos agrupados es:

$$R = 11.5 - 1.5$$

El ancho de los límites y de los intervalos, es:

$$c = 2$$

o bien,

$$c = \frac{V_M - V_m}{\sqrt{n}} = \frac{10 - 2}{\sqrt{30}} \approx 1.5$$

por lo tanto, se redondea al siguiente entero:

$$c = 2$$

- c) El promedio de las calificaciones, utilizando los datos agrupados, se define por:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i f_i = \sum_{i=1}^m x_i f_i^*$$

sustituyendo:

$$\bar{x} = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^5 x_i f_i = \frac{1}{30} [(2.5)(4) + (4.5)(9) + (6.5)(8) + (8.5)(6) + (10.5)(3)] = \frac{185}{30} = 6.2$$

- d) La desviación estándar de las calificaciones para la muestra, está definida por la raíz de la variancia, entonces:

$$s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 f_i$$

sustituyendo:

$$s_{n-1}^2 = \frac{1}{29} [(2.5 - 185/30)^2 (4) + (4.5 - 185/30)^2 (9) + (6.5 - 185/30)^2 (8) + (8.5 - 185/30)^2 (6) + (10.5 - 185/30)^2 (3)]$$

$$s_{n-1}^2 \approx 5.8$$

obteniendo la raíz:

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 f_i}$$

sustituyendo:

$$s_{n-1} = \sqrt{5.8}$$

$$s_{n-1} = 2.4$$

- e) La simetría se define como el tercer momento con respecto de la media entre la desviación estándar al cubo, entonces:

$$a_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^3 f_i}{(s_{n-1})^3} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^3 f_i^*}{(s_{n-1})^3}$$

sustituyendo:

$$a_3 = \frac{\frac{1}{30} [(2.5 - 185/30)^3 (4) + (4.5 - 185/30)^3 (9) + (6.5 - 185/30)^3 (8) + (8.5 - 185/30)^3 (6) + (10.5 - 185/30)^3 (3)]}{(2.4)^3}$$

realizando operaciones:

$$a_3 \approx 0.194$$

$$0 < 0.194$$

por lo tanto, es una muestra de calificaciones con ligero sesgo positivo.

La curtosis se define como el cuarto momento con respecto de la media entre la desviación estándar elevado a la cuarta, entonces:

$$a_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^4 f_i}{(s_{n-1})^4} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^4 f_i^*}{(s_{n-1})^4}$$

sustituyendo:

$$a_4 = \frac{1}{30} \left[(2.5 - 185/30)^4 (4) + (4.5 - 185/30)^4 (9) + (6.5 - 185/30)^4 (8) + (8.5 - 185/30)^4 (6) + (10.5 - 185/30)^4 (3) \right] \\ (2.4)^4$$

realizando operaciones:

$$a_4 \approx 1.463$$

$$1.463 < 3$$

por lo tanto es una muestra con aplanamiento del tipo platicúrtica.

2. Si los eventos A y B son independientes y, $P(A) = 0.25$ y $P(B) = 0.40$, calcular: $P(A \cap B)$, $P(A | B)$, $P(A \cup B)$; y $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

12 Puntos

Resolución

Por independencia de los eventos:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{10}\right) = (0.25)(0.4) = \frac{1}{10} = 0.1$$

Entonces:

$$P(A | B) = P(A) = \frac{1}{4} = 0.25$$

De los Teoremas de probabilidad:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{4}{10} - \frac{1}{10} = \frac{5+8-2}{20} = \frac{11}{20} = 0.55$$

Se sabe que:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20} = 0.45$$

3. Para construir tres subestaciones, una empresa eléctrica cuenta con dos compañías constructoras, la probabilidad de que una de estas compañías realice la construcción de cualquiera de las tres subestaciones es de 0.6. Si X es la variable aleatoria que representa el número de subestaciones que puede construir una compañía:
- Construir la función de probabilidad de la variable aleatoria X .
 - Calcular la probabilidad de que una compañía construya dos de las tres obras.
 - Obtener la desviación estándar de la variable aleatoria X .

18 Puntos

Resolución

- a) Sea C el evento que representa la compañía construye una subestación.

$$P(C) = 0.6$$

Sea X la variable aleatoria que representa el número de subestaciones que puede construir la compañía.

$$X \sim \text{Binomial}(n = 3, p = 0.6)$$

por lo que la función de probabilidad en forma analítica, es:

$$f_x(x) = \begin{cases} \binom{3}{x} (0.6)^x (1-0.6)^{3-x} & ; \quad x = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

la función de probabilidad en forma tabular es:

X	0	1	2	3
$f_X(x)$	0.064	0.288	0.432	0.216

- b) La probabilidad de que una compañía construya dos de las tres subestaciones, $f_X(X=2) = P(X=2)$, entonces de la función de probabilidad se obtiene:

$$P(X=2) = 0.432$$

- c) Para calcular la desviación estándar, primero se debe calcular la variancia:

$$Var(X) = E[(X - \mu_X)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\text{La media es } E(X) = \mu_X = \sum_{\forall x} x f_X(x)$$

calculado:

$$E(X) = (1)(0.288) + (2)(0.432) + (3)(0.216) = 1.8$$

El segundo momento con respecto al origen está definido por:

$$E(X^2) = \sum_{\forall x} x^2 f_X(x)$$

calculando:

$$E(X^2) = (1^2)(0.288) + (2^2)(0.432) + (3^2)(0.216) = 3.96$$

sustituyendo en la variancia y realizando operaciones:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3.96 - (1.8)^2 = 0.72$$

Entonces la desviación estándar se define como:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

$$\sigma_X = \sqrt{0.72} = 0.849$$

4. La siguiente tabla muestra la relación que se presenta entre la pureza del oxígeno producido en un proceso de destilación química, contra el porcentaje de hidrocarburos que están presentes en el condensador principal de la unidad de destilación.

Nivel de hidrocarburos	x (%)	0.99	1.02	1.05	1.29	1.46	1.36	0.87	1.23	1.55	1.4
Pureza	y (%)	90.01	89.05	91.43	93.74	96.73	94.45	87.59	91.77	99.42	93.65
	x (%)	1.19	1.15	0.98	1.01	1.11	1.2	1.26	1.32	1.43	0.95
	y (%)	93.54	92.52	90.56	89.54	89.85	90.39	93.25	93.41	94.98	87.33

- a) Ajustar un modelo de regresión lineal simple.
b) ¿Puede considerarse válido el modelo? Justificar su respuesta.
Se sabe que:

Sumas:

x	y	x ²	y ²	xy
23.82	1843.21	29.0692	170044.5321	2205.5136

10 Puntos

Resolución

- a) El modelo es:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i \sum_{i=1}^{20} y_i}{20}}{\sum_{i=1}^{20} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{20} x_i\right)^2}{20}} = \frac{2205.5136 - \frac{(23.82)(1843.21)}{20}}{29.0692 - \frac{(23.82)^2}{20}} \approx 14.6523$$

y

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1843.21}{20} - (14.6523) \left(\frac{23.82}{20} \right) \approx 74.7096$$

El modelo queda:

$$\hat{y} = 74.7096 + 14.6523x$$

- b) Para determinar si el modelo es válido debe obtenerse el coeficiente de determinación. El coeficiente de correlación, está definido por:

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx} SS_{yy}}}$$

$$SS_{xx} = \sum_{i=1}^{20} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{20} x_i\right)^2}{20} = 29.0692 - \frac{(23.82)^2}{20} \approx 0.6996$$

$$SS_{yy} = \sum_{i=1}^{20} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{20} y_i\right)^2}{20} = 170044.5321 - \frac{(1843.21)^2}{20} \approx 173.3769$$

$$SS_{xy} = \sum_{i=1}^{20} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i \sum_{i=1}^{20} y_i}{20} = 2205.5136 - \frac{(23.82)(1843.21)}{20} \approx 10.2505$$

sustituyendo:

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx} SS_{yy}}} = \frac{10.2505}{\sqrt{(0.6996)(173.3769)}} \approx 0.9307$$

Entonces el coeficiente de determinación será:

$$r^2 = R^2 = \frac{SS_{xy}^2}{SS_{xx} SS_{yy}} = \frac{(10.2505)^2}{(0.6996)(173.3769)} \approx 0.8663$$

El ajuste es regular y puede considerarse válido el modelo dependiendo del error que se esté dispuesto a cometer.

5. La presión de aire de un neumático seleccionado al azar, instalado en un automóvil nuevo, está distribuido normalmente con valor medio de $31 \left[\frac{lb}{pu\lg^2} \right]$ y desviación estándar de $0.2 \left[\frac{lb}{pu\lg^2} \right]$.
- a) Calcular la probabilidad de que la presión de un neumático, seleccionado al azar, exceda de $30.5 \left[\frac{lb}{pu\lg^2} \right]$.
- b) Determinar la probabilidad de que la presión de un neumático, seleccionado al azar, se encuentre entre 30.5 y $31.5 \left[\frac{lb}{pu\lg^2} \right]$.
- c) Supóngase que un neumático se considera con presión baja si está debajo de $30.4 \left[\frac{lb}{pu\lg^2} \right]$, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los cuatro neumáticos de un automóvil se encuentre bajo?

12 Puntos

Resolución

Sea X la variable aleatoria que representa la presión del aire de un neumático instalado en un automóvil nuevo.

- a) Del enunciado:

$$X \sim N\left(31, (0.2)^2\right)$$

se pide calcular, $P(X > 30.5)$:

estandarizando:

$$P(X > 30.5) = P\left(Z > \frac{30.5 - 31}{0.2}\right) = P(Z > -2.5)$$

Usando la tabla de la función de distribución acumulativa normal estándar:

$$P(X > 30.5) = 1 - F_z(-2.5) = 1 - 0.0062 = 0.9938$$

- b) Se pide determinar, $P(30.5 \leq X \leq 31.5)$

Estandarizando:

$$P(30.5 \leq X \leq 31.5) = P\left(\frac{30.5 - 31}{0.2} \leq Z \leq \frac{31.5 - 31}{0.2}\right) = P(-2.5 \leq Z \leq 2.5)$$

Usando la tabla de la función de distribución acumulativa normal estándar:

$$P(30.5 \leq X \leq 31.5) = F_z(2.5) - F_z(-2.5) = 0.9938 - 0.0062 = 0.9876$$

- c) Un neumático tiene la presión baja con una probabilidad de:

$$P(X \leq 30.4) = P\left(Z < \frac{30.4 - 31}{0.2}\right) = P(Z \leq -3) = 0.0013$$

Sea Y la variable aleatoria que representa el número de neumáticos con la presión baja de los cuatro que tiene un automóvil.

$$Y \sim \text{Binomial}(n = 4, p = 0.0013)$$

entonces la probabilidad es:

$$P(Y \geq 1) = P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4)$$

o bien,

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - \binom{4}{0} (0.0013)^0 (1 - 0.0013)^4$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - (0.9948)^4 = 0.0052$$

6. Supóngase que en cierto tipo de lavadora, tanto el espesor como el diámetro de la cavidad son diferentes en cada unidad. Sea X la variable aleatoria que representa el espesor, en milímetros, y Y la variable aleatoria que representa el diámetro de la cavidad, en milímetros, de una lavadora seleccionada al azar. Supóngase que la función de densidad conjunta de las variables aleatorias X y Y está dada por:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k(x+y) & ; \quad 1 \leq x \leq 2 \\ & ; \quad 4 \leq y \leq 5 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Calcular el valor de k que hace una función de densidad.
- Determinar la probabilidad de que una lavadora seleccionada aleatoriamente tenga un espesor entre 1.0 y 1.5 [mm] y una cavidad con un diámetro entre 4.5 y 5 [mm].
- Obtener la función de densidad si se sabe que el espesor es de 1.5 [mm].
- Cuál es el diámetro esperado, si el espesor es de 1.5 [mm].

16 Puntos

Resolución

- a) De las propiedades de una función de densidad, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) \, dx dy = 1$$

sustituyendo:

$$\int_4^5 \int_1^2 k(x+y) \, dx dy = k \int_4^5 \int_1^2 (x+y) \, dx dy = 1$$

integrando con respecto de x :

$$k \int_4^5 \left(\frac{x^2}{2} + xy \right) \Big|_1^2 dy = k \int_4^5 \left(\frac{4}{2} + 2y - \frac{1}{2} - y \right) dy = k \int_4^5 \left(y + \frac{3}{2} \right) dy = 1$$

integrando con respecto de y :

$$k \int_4^5 \left(y + \frac{3}{2} \right) dy = k \left(\frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}y \right) \Big|_4^5 = k \left(\frac{25}{2} + \frac{15}{2} - \frac{16}{2} - \frac{12}{2} \right) = k \left(\frac{12}{2} \right) = 6k = 1$$

por lo tanto:

$$k = \frac{1}{6}$$

sustituyendo:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(x+y) & ; \quad 1 \leq x \leq 2 \\ & ; \quad 4 \leq y \leq 5 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

- b) Se pide calcular $P(1 \leq X \leq 1.5, 4.5 \leq Y \leq 5)$, como la región de la función de densidad es cuadrada, entonces:

$$P(1 \leq X \leq 1.5, 4.5 \leq Y \leq 5) = \int_{4.5}^5 \int_1^{1.5} \frac{1}{6}(x+y) \, dx dy = \frac{1}{6} \int_{4.5}^5 \int_1^{1.5} (x+y) \, dx dy = \frac{1}{4} = 0.25$$

integrando con respecto a x :

$$\frac{1}{6} \int_4^5 \left(\frac{x^2}{2} + yx \right) \Big|_1^{1.5} dy = \frac{1}{6} \int_4^5 \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2} - y \right) dy = \frac{1}{6} \int_4^5 \left(\frac{1}{2}y + \frac{5}{8} \right) dy$$

integrando con respecto de y :

$$\frac{1}{6} \int_{4.5}^5 \left(\frac{1}{2}y + \frac{5}{8} \right) dy = \frac{1}{6} \left(\frac{y^2}{4} + \frac{5}{8}y \right) \Big|_{4.5}^5 = \frac{1}{6} \left(\frac{25}{4} + \frac{25}{8} - \frac{81}{16} - \frac{45}{16} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{24}{16} \right) = \frac{24}{96} = \frac{1}{4}$$

c) Se pide determinar la función de densidad, dado que el espesor es de $\frac{3}{2}$, entonces:

$$f_{Y|X=\frac{3}{2}} \left(Y|X = \frac{3}{2} \right) = \begin{cases} \frac{f_{XY} \left(\frac{3}{2}, y \right)}{f_X \left(X = \frac{3}{2} \right)} & ; \quad 4 \leq y \leq 5 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para lo cual, se requiere calcular la función marginal de X , entonces:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_4^5 \frac{1}{6}(x+y) dy = \frac{1}{6} \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_4^5 = \frac{1}{6} \left[5x + \frac{25}{2} - 4x - \frac{16}{2} \right]$$

$$f_X(x) = \frac{1}{6} \left[x + \frac{9}{2} \right]$$

por lo tanto queda definida por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \left(x + \frac{9}{2} \right) & ; \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora, sustituyendo en la función de densidad condicional, se tiene:

$$f_{Y|X=x_0} \left(Y|X = \frac{3}{2} \right) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{6} \left(\frac{3}{2} + y \right)}{\frac{1}{6} \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{2} \right)} & ; \quad 4 \leq y \leq 5 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

desarrollando y simplificando:

$$f_{Y|X=\frac{3}{2}} \left(Y|X = \frac{3}{2} \right) = \begin{cases} \frac{3+2y}{12} & ; \quad 4 \leq y \leq 5 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

d) El diámetro esperado, si el espesor es de 1.5 [mm], es el valor esperado de la función de densidad condicional, entonces:

$$E \left(Y|X = \frac{3}{2} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X=\frac{3}{2}} \left(Y|X = \frac{3}{2} \right) dy$$

sustituyendo:

$$\begin{aligned} E \left(Y|X = \frac{3}{2} \right) &= \int_4^5 y \left(\frac{3+2y}{12} \right) dy = \frac{1}{12} \int_4^5 (3y + 2y^2) dy = \frac{1}{12} \left(\frac{3}{2}y^2 + \frac{2}{3}y^3 \right) \Big|_4^5 = \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{3}{2}(25) + \frac{2}{3}(125) - \frac{3}{2}(16) - \frac{2}{3}(64) \right) = \frac{1}{12} \left(\frac{27}{2} + \frac{122}{3} \right) = \frac{1}{12} \left(\frac{81+244}{6} \right) = \frac{325}{72} \approx 4.5139 \end{aligned}$$

7. Se extrae una muestra aleatoria de tamaño 10 de una distribución normal con media 4. La estadística t de Student $T = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}}$, donde $t = \frac{\bar{x} - 4}{\frac{s}{\sqrt{10}}}$ es calculada. ¿Cuál es la probabilidad de que

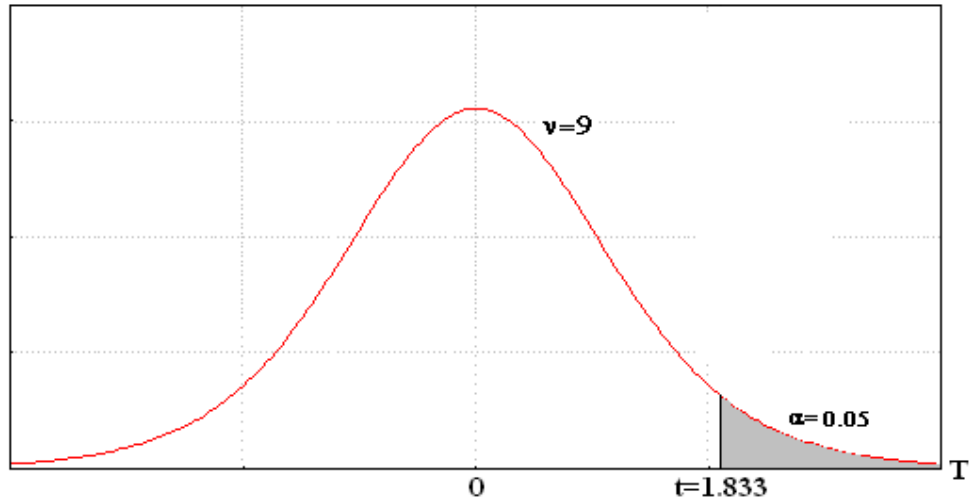
$$P(T > 1.833)?$$

8 Puntos

Resolución

Esta estadística t tiene $10 - 1 = 9$ grados de libertad. De la tabla t de Student, $P(T > 1.833) = 0.05$

Función de densidad de probabilidad



Valores de la función de distribución acumulativa normal estándar

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064

Distribución t de Student

v	0.01	0.015	0.02	0.025	0.05	0.075	0.1
1	31.821	21.205	15.894	12.706	6.314	4.165	3.078
2	6.965	5.643	4.849	4.303	2.920	2.282	1.886
3	4.541	3.896	3.482	3.182	2.353	1.924	1.638
4	3.747	3.298	2.999	2.776	2.132	1.778	1.533
5	3.365	3.003	2.757	2.571	2.015	1.699	1.476
6	3.143	2.829	2.612	2.447	1.943	1.650	1.440
7	2.998	2.715	2.517	2.365	1.895	1.617	1.415
8	2.896	2.634	2.449	2.306	1.860	1.592	1.397
9	2.821	2.574	2.398	2.262	1.833	1.574	1.383
10	2.764	2.527	2.359	2.228	1.812	1.559	1.372
11	2.718	2.491	2.328	2.201	1.796	1.548	1.363