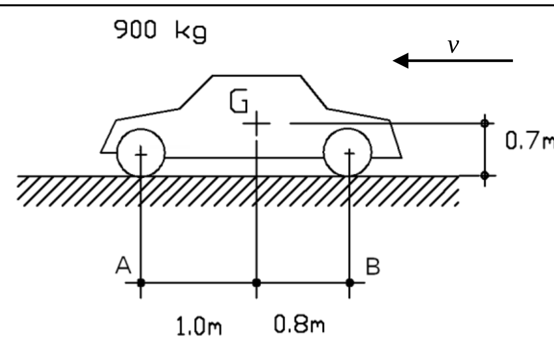
5. CINÉTICA DEL CUERPO RÍGIDO

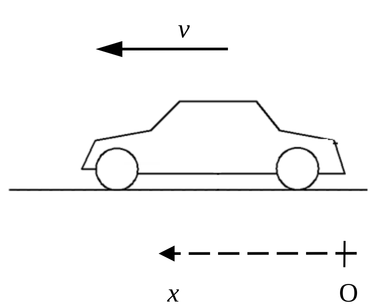
5.1 Traslación pura

1. El automóvil representado en la figura viaja hacia la izquierda a 72 km/h cuando comienza a frenar, uniformemente, hasta detenerse por completo en una longitud de 40 m. Sabiendo que la masa del automóvil es de 900 kg, determine la magnitud de las componentes normales de la reacción del pavimento sobre cada una de las llantas del automóvil.



Resolución

Investigamos, para comenzar, la aceleración del centro de masa del automóvil, que es igual a la de cualquier partícula suya.



$$a = v\frac{dv}{dx}$$

Como frena uniformemente, la aceleración es constante.

$$\int a dx = \int v dv$$

$$ax = \frac{v^2}{2} + C$$

Eligiendo como origen la posición en que comienza a frenar.

Si $x = 0$, $v = 72 \ {}^{\text{km}}/_{\text{h}} = 20 \ {}^{\text{m}}/_{\text{s}} \leftarrow$

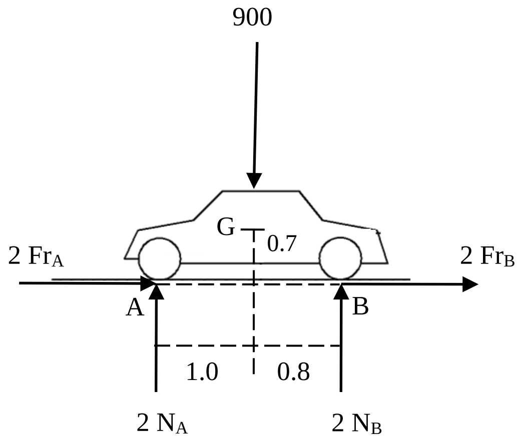
$$0 = \frac{20^2}{2} + C; \quad C = -200$$

$$ax = \frac{v^2}{2} - 200 = \frac{v^2 - 400}{2}$$

$$a = \frac{v^2 - 400}{2x}$$

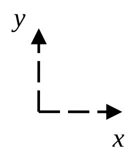
Para $x = 40 \leftarrow$ y $v = 0$

$$a = \frac{0 - 400}{2(40)}; \quad a = -5 \ \mathrm{m/s^2}$$



El signo negativo indica que su sentido es hacia la derecha.
Ahora pasamos a la parte cinética del problema. Dibujamos un diagrama de cuerpo libre que represente cualquier instante del movimiento en estudio y elegimos un sistema de referencia.

Las normales son $2N_A$ y $2N_B$ puesto que atrás de las llantas dibujadas hay otras dos que no se ven.
Nos auxiliamos de un diagrama que represente al sistema resultante de las fuerzas que actúan sobre el automóvil.



Elegimos B como centro de momentos:

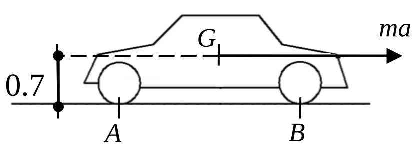
$$\sum M_B F = ma\bar{d}$$

El primer miembro corresponde al diagrama de cuerpo libre; el segundo, al diagrama auxiliar.

$$2N_A(1.8) - 900(0.8) = 0.7\left(\frac{900}{9.81}\right)5$$

$$3.6N_A = 900\left(0.8 + \frac{3.5}{9.81}\right)$$

$$N_A = \frac{900}{3.6}\left(0.8 + \frac{3.5}{9.81}\right)$$



$$\boxed{N_A = 289 \ \mathrm{kg} \uparrow}$$

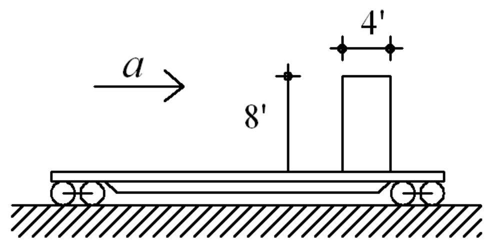
$$\sum Fy = 0$$

$$2(289) - 900 + 2N_B = 0$$

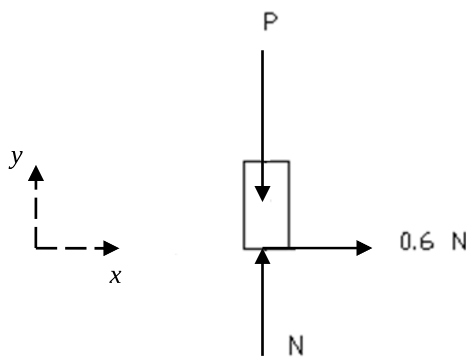
$$N_B = 450 - 289$$

$$\boxed{N_B = 160.8 \ \mathrm{kg} \uparrow}$$

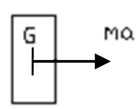
2. Sobre el carro-plataforma de un tren, se transporta un ropero de las dimensiones indicadas en la figura. Se desea investigar cuál es el tiempo mínimo que requiere el tren para alcanzar una rapidez de 60 mi/h, partiendo del reposo, sin que el ropero se deslice ni se vuelque. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el ropero y el carro son 0.6 y 0.5, respectivamente.



Resolución



Para determinar el tiempo mínimo, obtendremos la máxima aceleración que puede soportar el ropero. Supondremos, en primer lugar, que dicho ropero está a punto de deslizarse. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura; la fuerza de fricción es la estática máxima. Abajo se presenta un diagrama auxiliar que muestra la fuerza resultante.



$$\sum Fy = 0$$

$$N - P = 0$$

$$N = P$$

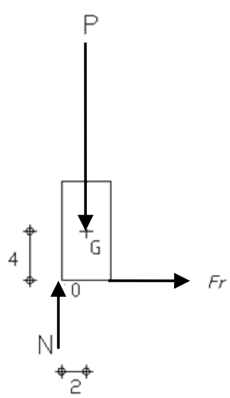
$$\sum Fx = ma$$

$$0.6N = \frac{P}{g}a$$

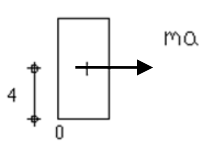
$$0.6P = \frac{P}{g}a$$

$$a = 0.6g$$

$$a = 0.6(32.2) = 19.32$$



Ahora supondremos que el ropero está a punto de volcarse. El diagrama de cuerpo libre y el auxiliar se muestran al lado.



La componente normal de la reacción del carro se encuentra en el extremo izquierdo de la base de sustentación. La fricción estática no alcanza necesariamente su valor máximo.

Elegimos el punto O de intersección de la normal y la fricción, que son desconocidas, como centro de momentos.

$$\sum M_O F = ma\bar{d}$$

$$-2P = -\frac{P}{g}a(4)$$

$$a = \frac{2g}{4} = \frac{2(32.3)}{4}$$

$$a = 16.1$$

Puesto que con una aceleración superior a $16.1 \ \mathrm{ft}/\mathrm{s}^2$ el ropero se volcaría, es ésta la máxima admisible. El tiempo mínimo será por tanto:

$$a = 16.1$$

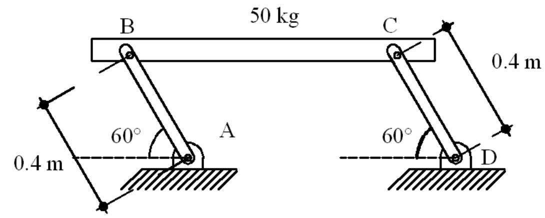
$$v = 16.1t$$

Para alcanzar $60 \ \mathrm{mi}/\mathrm{h} = 88 \ \mathrm{ft}/\mathrm{s}$

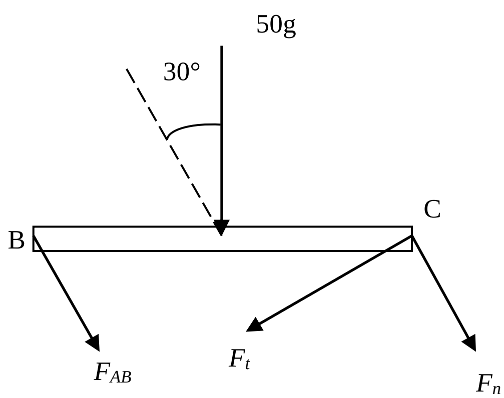
$$88 = 16.1 \ \mathrm{t}$$

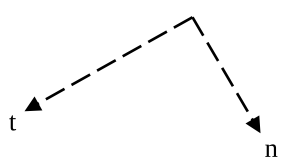
$$\boxed{t = 5.47 \ \mathrm{s}}$$

3. Las barras *AB* y *CD* tienen 0.4 m de largo. La barra *CD* está conectada en *D* con un motor que la mueve con una velocidad angular constante de 300 rpm en sentido antihorario. La barra homogénea *BC* tiene 50 kg de masa. Determine cuál es, en el instante mostrado en la figura, la fuerza y tipo de esfuerzo a que está sujeta la barra *AB*, sabiendo que su masa es despreciable.



Resolución





La barra BC se mueve con traslación pura curvilínea. La aceleración de cualquiera de sus partículas sólo tiene componente normal.

$$a = a_n = \omega^2 r$$

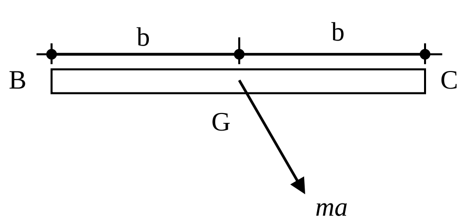
y la velocidad angular, en *rad /s*, es

$$\omega = 300\left(\frac{2\pi}{60}\right) = 10\pi$$

$$a = (10\pi)^2 0.4 = 40\pi^2$$

Una vez dibujados el diagrama de cuerpo libre y un auxiliar que muestre el sistema resultante, elegimos un sistema de referencia intrínseco. Supongamos que F_{AB} es tensión.

Elegiremos C, punto de concurrencia de dos incógnitas, como centro de momentos.



$$\sum M_C F = ma\bar{d}$$

$$F_{AB}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)2b + 50gb = 50(40\pi^2)\frac{\sqrt{3}}{2}(b)$$

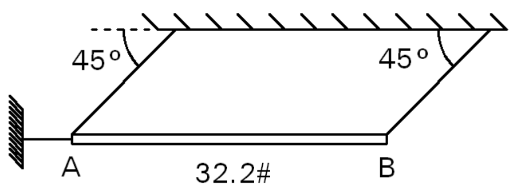
$$F_{AB}\sqrt{3} + 50g = 1000\pi^2\sqrt{3}$$

$$F_{AB} = \frac{1000\pi^2\sqrt{3} - 50(9.81)}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{F_{AB} = 9590 \text{ N } (\text{tensión})}$$

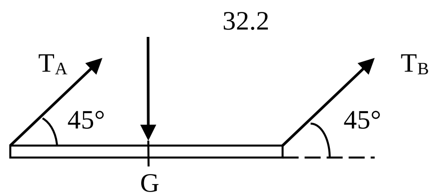
Se trata de una tensión pues, al tener signo positivo, satisface la hipótesis.

4. La barra *AB* de la figura es homogénea y pesa 32.2 lb. Calcule la tensión que soportará cada una de la cuerdas inclinadas 45º, en el instante en que se corte la cuerda horizontal. Calcule también la aceleración lineal de cualquier partícula de la barra en ese mismo instante.



Resolución

La barra se moverá con traslación pura curvilínea. Dibujamos el diagrama de cuerpo libre en el instante en que empieza el movimiento. También un dibujo auxiliar que muestre la fuerza resultante. Elegimos un sistema de referencia intrínseco.



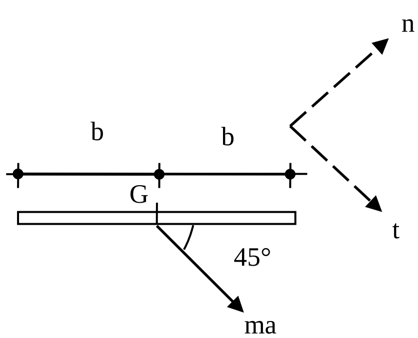
$$\sum M_G F = 0$$

$$-T_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)b + T_B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)b = 0$$

$$T_A = T_B \qquad\qquad (1)$$

$$\sum F_n = ma_n$$

Como la velocidad es nula, $a_n = 0$



$$T_A + T_B - 32.2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$2T_A = 32.2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$T_A = \frac{32.2\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{T_A = T_B = 11.38\ \text{lb}}$$

$$\sum F_t = ma_t$$

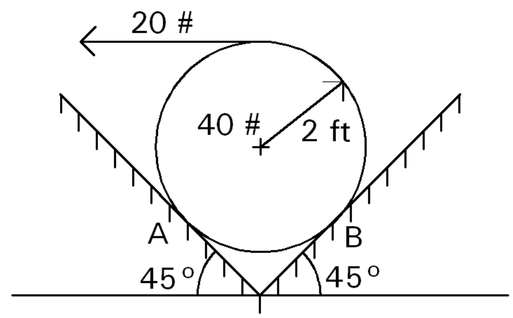
en donde $a_t = a$

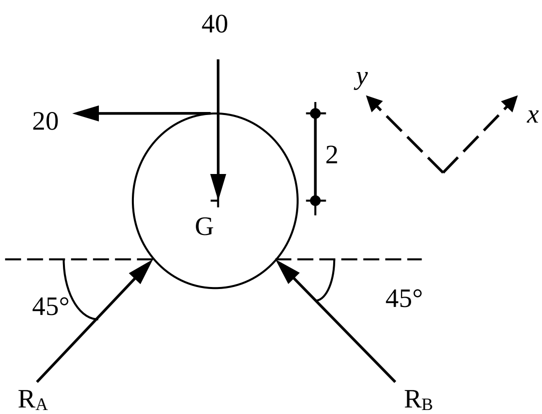
$$32.2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{32.2}{32.2}a$$

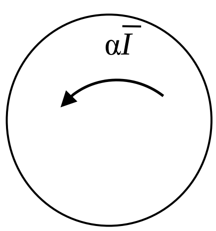
$$\boxed{a = 22.8\ \mathrm{ft/s^2}\ \searrow 45°}$$

5.2 Rotación pura baricéntrica

5. Un tambor de 40 lb de peso y 2 ft de radio está colocado sobre dos planos lisos inclinados 45º, como se muestra en la figura. Por medio de una cuerda ideal enrollada en él, se le aplica una fuerza constante de 20 lb. El tambor tiene un radio de giro centroidal de 1.5 ft. Calcule la aceleración angular del tambor y las reacciones de los planos sobre él.







Resolución

Como el tambor gira alrededor de un eje que pasa por su centro de masa, el sistema resultante de las fuerzas que actúan sobre él es un par. Dibujamos el diagrama de cuerpo libre del tambor y otro auxiliar que muestre el par resultante.

Elegimos un sistema de referencia cuyos ejes tienen las direcciones de la reacciones.

$$\sum Fx = 0$$

$$R_A - 40\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 20\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$R_A = 60\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 30\sqrt{2}$$

$$\boxed{R_A = 42.4\ \text{lb}\ \measuredangle\ 45°}$$

$$\sum Fy = 0$$

$$R_B - 40\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 20\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$R_B = 20\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 10\sqrt{2}$$

$$\boxed{R_B = 14.14 \text{ lb} \quad 45°}$$

$$\sum M_G F = \alpha \overline{I_G}$$

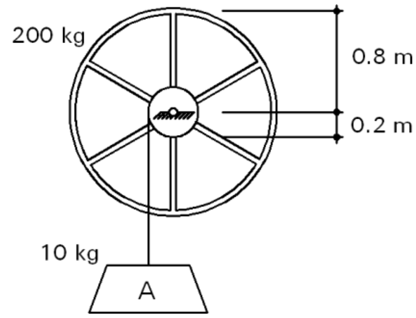
$$20(2) = \alpha\left[\bar{k}^2 \text{m}\right]$$

$$40 = \alpha\left(1.5^2\right)\frac{40}{32.2}$$

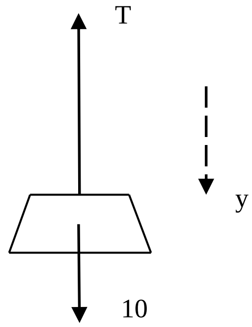
$$\alpha = \frac{32.2}{1.5^2}$$

$$\boxed{\alpha = 14.31 \ \text{rad}/\text{s}^2}$$

6. El volante de la figura pesa 200 kg. El conjunto gira por la acción del cuerpo *A* de 10 kg que desciende verticalmente. Determine la ten-sión de la cuerda, la aceleración lineal del cuerpo *A* y la aceleración angular del volante.



Resolución



Como se trata de un problema de cuerpos conectados, comenzaremos estableciendo la relación cinemática entre la aceleración lineal de A y la angular del volante.

$a_A = \alpha r$

En este caso, r es el radio de la polea

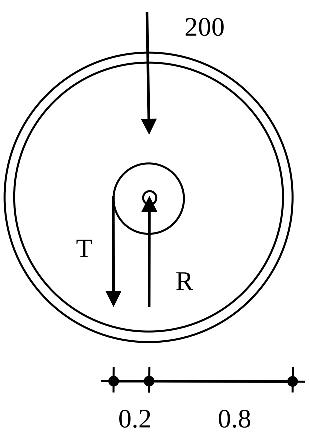
$a_A = 0.2\alpha$ ________________ (1)

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de A y elegimos un eje de referencia en dirección de la aceleración del cuerpo.

$\sum Fy = ma$

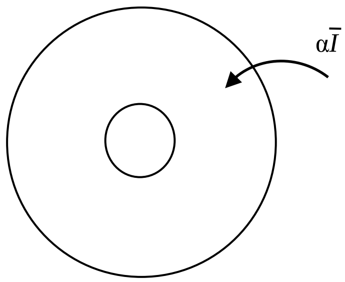
$10 - T = \frac{10}{g} a_A$

$T = 10 - \frac{10}{g} a_A$ _____________ (2)



Ahora continuamos con el diagrama de cuerpo libre del volante. La reacción R del apoyo tiene que ser vertical, pues sobre el volante no actúa ninguna fuerza horizontal. Dibujamos también un diagrama que muestre el sistema resultante.

Como la masa del volante está concentrada a 0.8 m del eje de rotación, su momento de inercia se calcula multiplicando el cuadrado de esa distancia por la masa.



$$\bar{I} = 0.8^2\left(\frac{200}{g}\right) = \frac{128}{g}$$

$$\sum M_G F = \alpha \bar{I}$$

$$0.2T = \frac{128}{g}\alpha$$

$$T = \frac{640}{g}\alpha \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad (3)$$

Igualamos (2) y (3), sustituyendo (1) en (2)

$$10 - \frac{10}{g}(0.2\alpha) = \frac{640}{g}\alpha$$

$$10 = \left(\frac{640}{g} + \frac{2}{g}\right)\alpha$$

$$\alpha = \frac{9.81\ (10)}{642}$$

$$\boxed{\alpha = 0.1528\ \mathrm{rad}/\mathrm{s}^2 \ \circlearrowleft}$$

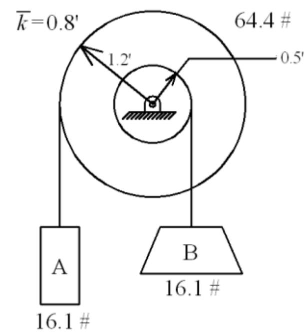
En (3)

$$\boxed{T = 9.97\ \text{kg}}$$

y en (2)

$$\boxed{a = 0.0306\ \mathrm{m}/\mathrm{s}^2 \downarrow}$$

7. Las dos poleas de la figura están rígidamente unidas, formando un cuerpo de 64.4 lb de peso. El radio de giro de su masa es de 0.8 ft, respecto al eje de rotación. Los cuerpos *A* y *B* pesan 16.1 lb cada uno y están unidos a las poleas mediante cuerdas de peso despreciable. Calcule la aceleración angular de la polea doble y la tensión en cada una de las cuerdas.



Resolución

Comenzaremos estableciendo las relaciones cinemáticas entre los movimientos de los tres cuerpos.

Para un punto cualquiera de la polea.

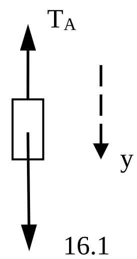
$a_t = \alpha r$

por tanto

$a_A = 1.2\alpha$ ______________(1)

$a_B = 0.5\alpha$ ______________(2)

Cuerpo A



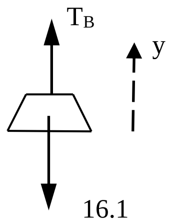
Como el cuerpo A desciende, elegimos un sistema de referencia dirigido hacia abajo:

$$\sum Fy = ma$$

$$16.1 - T_A = \frac{16.1}{32.2} a_A$$

$T_A = 16.1 - 0.5 a_A$ ___________(3)

Cuerpo B

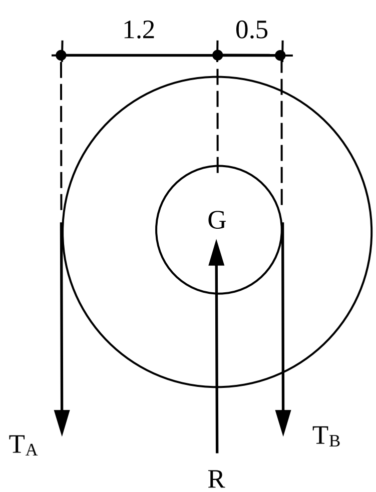


Del cuerpo B

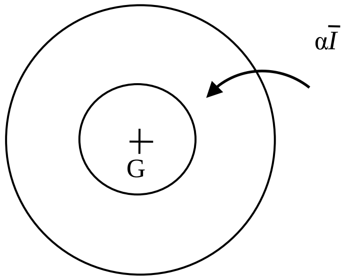
$$\sum Fy = ma$$

$$T_B - 16.1 = \frac{16.1}{32.2} a_B$$

$T_B = 16.1 + 0.5\ a_B$ ___________(4)



La polea doble gira con rotación pura baricéntrica y, por tanto, el sistema resultante de las fuerzas que actúan sobre ella es un par.



$$\sum M_G F = \alpha \bar{I}$$

$$1.2T_A - 0.5T_B = \alpha\left[0.8^2\left(\frac{64.4}{32.2}\right)\right]$$

$$1.2T_A - 0.5T_B = 1.28\ \alpha \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (5)$$

Sustituyendo (3) y (4) en (5)

$$1.2(16.1 - 0.5a_A) - 0.5(16.1 + 0.5a_B) = 1.28\ \alpha$$

$$19.32 - 0.6a_A - 8.05 - 0.25a_B = 1.28\ \alpha$$

Sustituyendo (1) y (2) en esta ecuación

$$19.32 - 0.6(1.2\alpha) - 8.05 - 0.25(0.5\alpha) = 1.28\alpha$$

$$11.27 - 0.845\alpha = 1.28\alpha$$

$$2.125\alpha = 11.27$$

$$\boxed{\alpha = 5.304\ \text{rad}/\text{s}^2 \ \circlearrowleft}$$

En (1) y (2)

$$a_A = 6.364$$

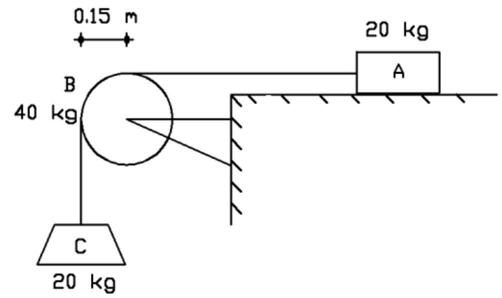
$$a_B = 2.652$$

En (3) y (4)

$$\boxed{T_A = 12.92\ \text{lb}}$$

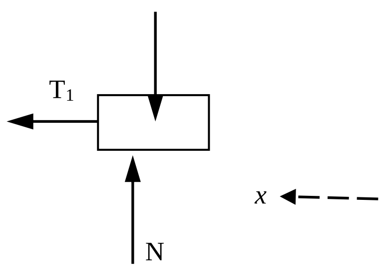
$$\boxed{T_B = 17.43\ \text{lb}}$$

8. Los cuerpos de la figura están inicialmente en reposo. Tanto *A* como *C* pesan 20 kg. La polea *B* es un cilindro macizo de 0.15 m de radio que pesa 40 kg. Determine la tensión en cada uno de los tramos de la cuerda y el tiempo que se requiere para que *A* y *C* alcancen una rapidez de 5 m/s. La superficie horizontal es lisa.



Resolución

Cuerpo A



Las relaciones cinemáticas entre los cuerpos son:

$$a_A = a_C = \alpha r$$

en donde α es la aceleración angular de la polea y r su radio. O sea

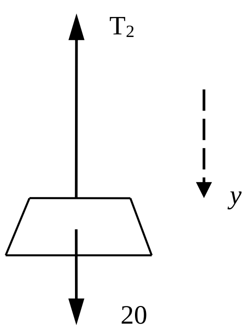
$$a_A = a_C = 0.15\alpha$$

Como A se mueve hacia la izquierda, elegimos un eje de referencia en esa dirección

$$\sum F_x = ma$$

$$T_1 = \frac{20}{9.81} a_A \quad \text{———} \quad (1)$$

Cuerpo B



Del cuerpo B

$$\sum F_y = ma$$

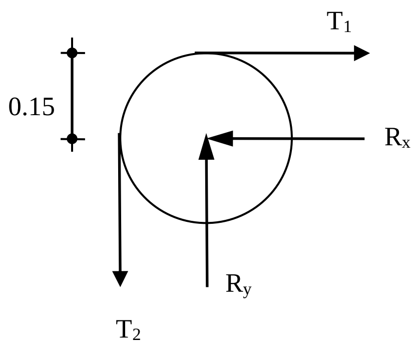
$$20 - T_2 = \frac{20}{9.81} a_B$$

$$T_2 = 20 - \frac{20}{9.81} a_B \quad \text{———} \quad (2)$$

La polea gira con rotación pura alrededor de su centro de masa. Tiene un momento de inercia de

$$\bar{I} = \frac{1}{2} m r^2$$

$$\bar{I} = \frac{1}{2}\left(\frac{40}{9.81}\right) 0.15^2 = 0.0459 \ \text{kg} \bullet \text{m}^2$$



Dibujaremos un diagrama de cuerpo libre y un diagrama auxiliar en que aparezca el sistema resultante de las fuerzas, que es un par.

$$\sum M_G F = \alpha \bar{I}$$

$$0.15T_2 - 0.15T_1 = 0.0459\alpha$$

$$0.15(T_2 - T_1) = 0.0459\alpha$$

$$T_2 - T_1 = 0.306\alpha \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (3)$$

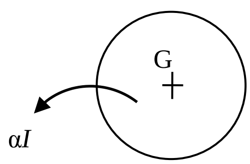
Sustituimos (1) y (2) en (3)

$$20 - \frac{20}{9.81}a_B - \frac{20}{9.81}a_A = 0.306\alpha$$

De las relaciones cinemáticas

$$20 - \frac{20}{9.81}(0.15\alpha) - \frac{20}{9.81}(0.15\alpha) = 0.306\alpha$$

$$20 - \frac{40}{9.81}(0.15\alpha) = 0.306\alpha$$



$$\left(0.306 + \frac{6}{9.81}\right)\alpha = 20$$

$$0.917\alpha = 20$$

$$\boxed{\alpha = 21.8 \ \text{rad}/\text{s}^2 \circlearrowleft}$$

De donde $a_A = a_B = 3.27$

y $\boxed{T_1 = 6.67 \ \text{kg}}$

que es la tensión en el tramo de cuerda que une A con la polea.

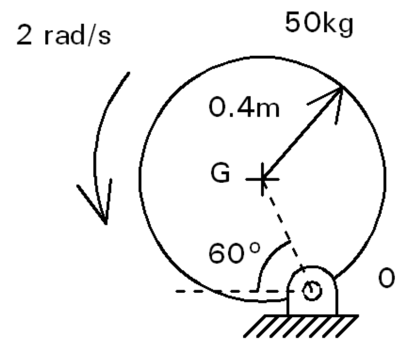
En el otro tramo la tensión es (de (3))

$$T_2 - 6.67 = 0.306(21.1)$$

$$\boxed{T_2 = 13.33 \ \text{kg}}$$

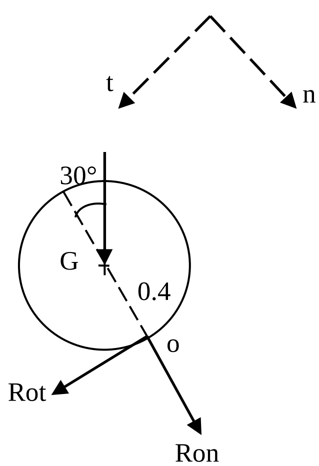
5.3 Rotación pura no baricéntrica

9. El disco homogéneo de 0.4 m de radio gira alrededor de un eje horizontal, perpendicular al plano que lo contiene, que pasa por *O*. En el instante mostrado en la figura, su velocidad angular es de 2 rad/s, en sentido antihorario. Sabiendo que el disco tiene una masa de 50 kg, diga cuál es su aceleración angular, así como la magnitud y dirección de la reacción de la articulación *O*.



Resolución

Dibujaremos el diagrama de cuerpo libre del disco y un diagrama auxiliar que muestre el sistema equivalente de las fuerzas. Elegimos un sistema de referencia intrínseco, en relación a G.

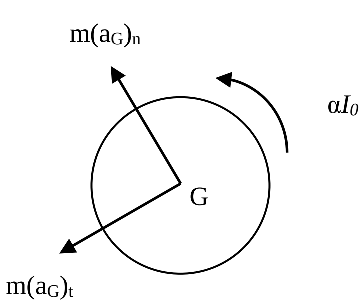


$$\sum M_O F = \alpha I_O$$
$$50(\text{sen } 30°)0.4 = \alpha I_O$$

Por el teorema de los ejes paralelos

$$I_O = \bar{I} + mr^2$$
$$I_O = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

Entonces:



$$50(0.5)0.4 = \alpha\left(\frac{3}{2}\right)\frac{50}{9.81}(0.4)^2$$
$$0.5 = \frac{3}{2}\left(\frac{0.4}{9.81}\right)\alpha$$
$$\alpha = \frac{9.81}{1.2}$$
$$\boxed{\alpha = 8.175 \ \text{rad}/\text{s}^2}$$

$$\sum F_n = m\omega^2 \bar{r}$$

$$Ron + 50\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{50}{9.81}\left(2^2\right)0.4$$

$$Ron = 50\left(\frac{1.6}{9.81} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -35$$

$$\sum F_t = m\alpha \bar{r}$$

$$Rot + 50\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{50}{9.81}(8.18)0.4$$

$$Rot = 50\left(\frac{(8.18)(0.4)}{9.81} - \frac{1}{2}\right) = -8.33$$

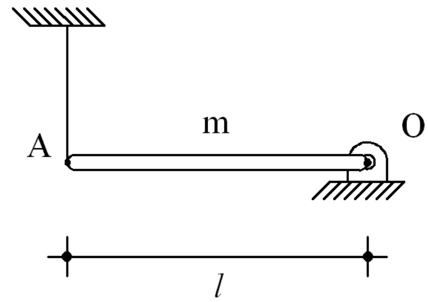
Como los signos indican que sus sentidos son contrarios al de los ejes, las componentes de *Ro* son:

$$Ro = \sqrt{35.1^2 + 8.33^2} = 36.1$$

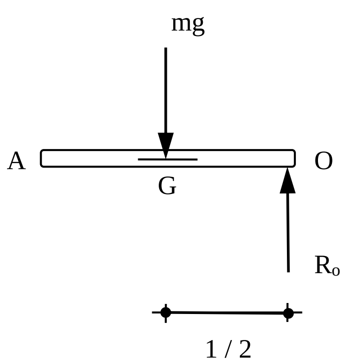
$$\tan\beta = \frac{8.33}{35.1}; \quad \beta = 13.3°$$

$$\boxed{Ro = 36.1 \text{ kg} \quad 73.3°}$$

10. La barra homogénea *AO* está articulada en *O* y soportada por una cuerda en *A*. Tiene una masa *m* y una longitud *l*. Determine tanto la aceleración angular de la barra como la magnitud y dirección de la reacción de la articulación en el instante que se corte la cuerda.



Resolución



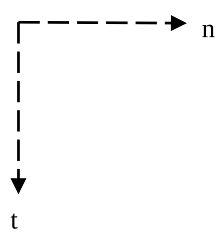
La barra se moverá con rotación pura alrededor de un eje que pasa por O. Su diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura. En el otro diagrama se muestra el sistema de fuerzas equivalente de las fuerzas que actúan sobre la barra en el instante en que se corta la cuerda.

Emplearemos un sistema de referencia intrínseco para el centro de masa, cuya aceleración normal es nula, ya que no tiene velocidad lineal.

$$\sum M_O F = \alpha I_O$$

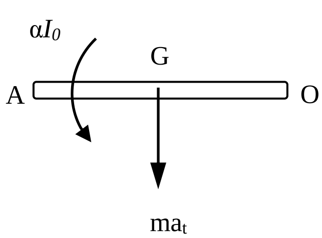
$$mg\left(\frac{l}{2}\right) = \alpha\left[\frac{1}{3}ml^2\right]$$

$$\frac{g}{2} = \frac{\alpha l}{3}$$



$$\boxed{\alpha = \frac{3g}{2l} \circlearrowleft}$$

$$\sum F_t = m\alpha\bar{r}$$

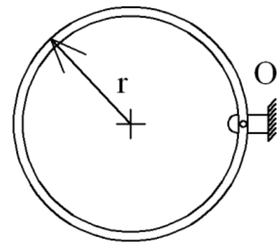


$$mg - Ro = m\left(\frac{3g}{2l}\right)\frac{l}{2}$$

$$Ro = m\left(g - \frac{3}{4}g\right)$$

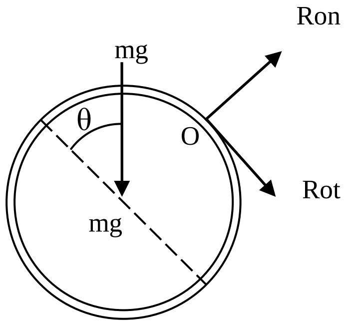
$$\boxed{Ro = \frac{1}{4}mg \uparrow}$$

11. El arillo de la figura tiene un radio r y se encuentra en reposo en la posición mostrada. Diga cuál será la rapidez angular máxima que alcanzará, si se suelta desde dicha posición.

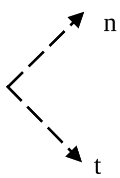


Resolución

Dibujaremos un diagrama de cuerpo libre que represente un instante cualquiera de la rotación del arillo. También un diagrama que muestre un sistema equivalente de las fuerzas. Elegimos un sistema de referencia intrínseco.

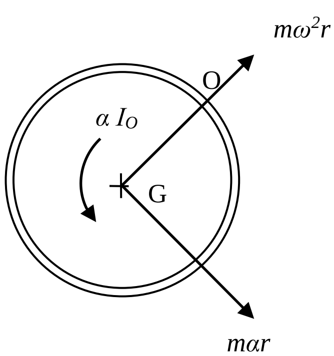


Calculamos el momento de inercia de la masa respecto al eje de rotación, mediante el teorema de los ejes paralelos.



$$I_O = \bar{I} + mr^2$$
$$I_O = mr^2 + mr^2$$
$$I_O = 2mr^2$$

La ecuación que empleamos es



$$\sum M_O F = \alpha I_O$$
$$mg\bar{r}\cos\theta = \alpha\left(2mr^2\right)$$
$$\alpha = \frac{g\cos\theta}{2r}$$

Como $\alpha = \omega\dfrac{d\omega}{d\theta}$

$$\omega\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{g\cos\theta}{2r}$$

Separando variables

$$\omega d\omega = \frac{g}{2r}\cos\theta\ d\theta$$

Integrando

$$\int \omega d\omega = \frac{g}{2r}\int \cos\theta\ d\theta$$

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{2r}\operatorname{sen}\theta + C$$

Las condiciones iniciales son $\omega = 0$ y $\theta = 0$; por tanto, la constante de integración es nula.

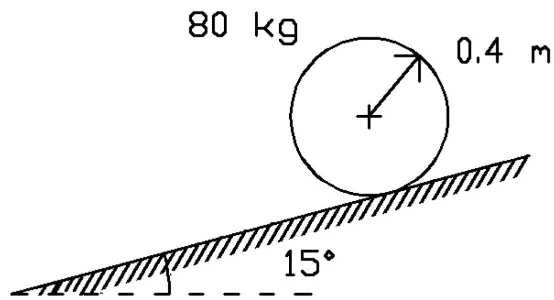
$$\omega^2 = \frac{g}{r}\operatorname{sen}\theta$$

Como la velocidad angular máxima ocurre cuando $\theta = 90°$ y $sen\theta = 1$

$$\boxed{\omega_{máx} = \sqrt{\frac{g}{r}}}$$

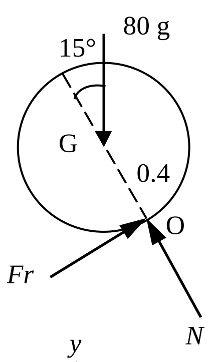
5.4 Movimiento plano general

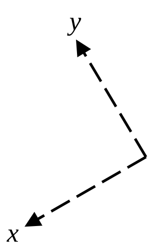
12. Una esfera homogénea de 80 kg de masa y 0.4 m de radio, se suelta del reposo sobre un plano inclinado 15º. La esfera desciende rodando sin deslizarse sobre el plano. Calcule, para cualquier instante del movimiento, la aceleración angular de la esfera; la aceleración lineal de su centro de masa; la fuerza de fricción que el plano ejerce sobre ella, y la magnitud de la componente normal de la reacción del plano.



Resolución

Dibujaremos el diagrama de cuerpo libre de la esfera, representando cualquier instante de su movimiento. Suponemos arbitrariamente el sentido de la fuerza de fricción. Elegimos un sistema de referencia cuyo eje equis tiene la dirección de la aceleración del centro de masa.





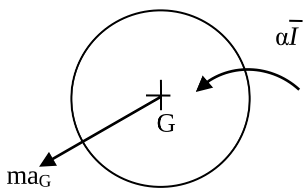
En un diagrama auxiliar dibujaremos una fuerza aplicad en G y un par de magnitud $\alpha\bar{I}$ que forman un sistema equivalente al que actúa sobre la esfera.

$$\sum M_G F = \alpha \bar{I}$$

$$0.4F_r = \alpha\left[\frac{2}{5}mr^2\right]$$

$$0.4F_r = \alpha\left[\frac{2}{5}(80)(0.4)^2\right]$$

$$F_r = 12.8\alpha \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (1)$$



$$\sum F_x = ma_G$$

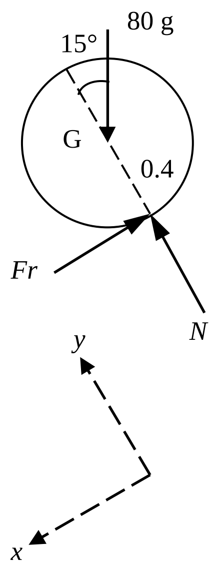
$$80(9.81)\text{sen}15° - F_r = 80a_G$$

$$203 - F_r = 80a_G$$

Del valor obtenido en (1)

$$203 - 12.8\alpha = 80a_G$$

Como la esfera rueda sin deslizar:



$$a_G = \alpha r$$
$$a_G = 0.4\alpha$$

Por tanto

$$203 - 12.8\alpha = 80(0.4\alpha)$$
$$44.8\alpha = 203$$

$$\boxed{\alpha = 4.53 \ \mathrm{rad/s^2}}$$

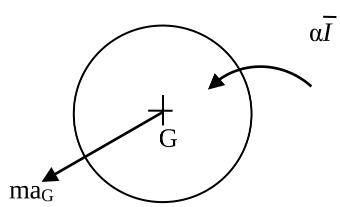
$$\boxed{a_G = 1.814 \ \mathrm{m/s^2} \quad 15°}$$

$$\boxed{F_r = 58 \ \mathrm{N} \quad 15°}$$

El sentido verdadero de la fuerza de fricción es el que se supuso.

$$\sum F_y = 0$$
$$N - 80(9.81)\cos 15° = 0$$

$$\boxed{N = 758 \ \mathrm{N} \quad 75°}$$



<u>Otro método</u>

Sabiendo que el punto de contacto de la esfera con el plano inclinado es el centro instantáneo de rotación:

$$\sum M_{CIR} F = \alpha I_{CIR}$$

El momento de inercia de la masa de la esfera respecto a ese punto es:

$$I_{CIR} = \bar{I} + mr^2 \quad \text{(teorema de los ejes paralelos)}$$
$$I_{CIR} = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2$$
$$I_{CIR} = \frac{7}{5}mr^2$$

Por tanto

$$80(9.81)0.4\,\text{sen}15° = \alpha\left(\frac{7}{5}\right)80\left(0.4^2\right)$$

$$9.81\,\text{sen}15° = \alpha\left(\frac{7}{5}\right)0.4$$

$$\alpha = \frac{5(9.81)\text{sen}15°}{2.8}$$

$$\boxed{\alpha = 4.53\ \text{rad}/\text{s}^2}$$

$$a_G = \alpha r$$

$$a_G = 4.53(0.4)$$

$$\boxed{a_G = 1.814\ \text{m}/\text{s}^2 \quad 15°}$$

$$\sum F_x = ma_G$$

$$80(9.81)\text{sen}15° - F_r = 80(1.814)$$

$$F_r = 80\left(9.81\ \ \text{sen}15° - 1.814\right)$$

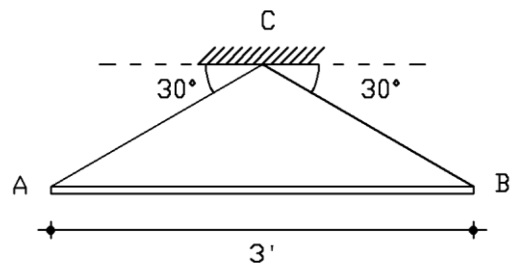
$$\boxed{F_r = 58\ \text{N} \quad 75°}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N - 80(9.81)\cos 15° = 0$$

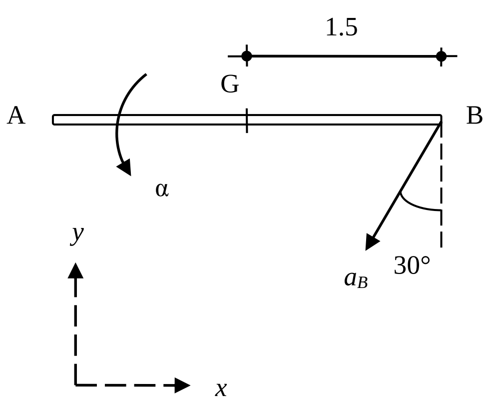
$$\boxed{N = 758 \quad 75°}$$

13. La barra delgada de la figura es homogénea, pesa 16.1 lb y mide 3 ft de largo. Pende del punto C por medio de dos cuerdas atadas a sus extremos, como se muestra. En el instante en que se corte la cuerda AC, ¿cuál será la tensión en la cuerda BC? ¿Cuál, la aceleración angular de la barra? ¿Qué magnitud y dirección tendrá la aceleración lineal de su centro de masa?



Resolución

Establecemos la relación entre la aceleración angular de la barra y la aceleración inicial de su centro de masa, tomando B como punto base y sabiendo que todas las velocidades son nulas.



$$\overline{a_G} = \overline{a_{G/B}} + \overline{a_B}$$

$$\overline{a_G} = \overline{\alpha} \times \overline{r_{G/B}} + \overline{a_B}$$

$$\overline{a_G} = \alpha k \times (-1.5i) - 0.5a_B i - 0.5\sqrt{3}\ a_B j$$

$$\overline{a_G} = 1.5\alpha j - 0.5a_B i - 0.5\sqrt{3}\ a_B j$$

Escalarmente:

$$(a_G)_x = -0.5a_B \qquad (1)$$

$$(a_G)_y = -1.5\alpha - 0.5\sqrt{3}\ a_B \qquad (2)$$

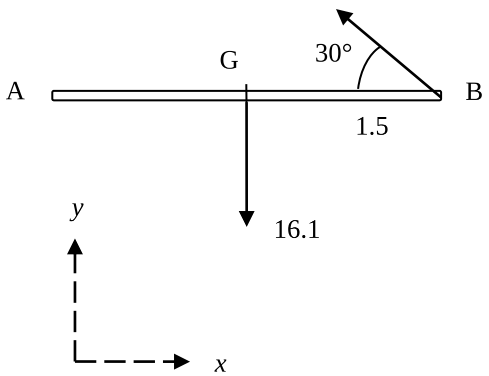
De (1)

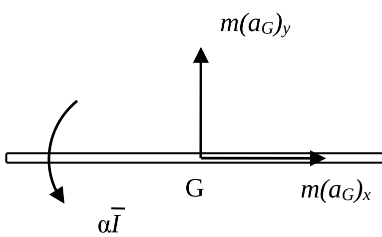
$$a_B = -2(a_G)_x$$

En (2)

$$(a_G)_y = -1.5\alpha + (a_G)_x\sqrt{3} \qquad (3)$$

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la barra y su diagrama auxiliar que muestre un sistema de fuerzas equivalente conforme al sistema cartesiano que elegimos.





$$\sum M_G F = \alpha \bar{I}$$

$$1.5T\ \text{sen}30° = \alpha\left[\frac{1}{12}(0.5)3^2\right]$$

$$1.5(0.5)T = \alpha(0.375)$$

$$T = 0.5\alpha \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ } (4)$$

$$\sum F_x = m(a_G)_x$$

$$-T\ \cos 30° = 0.5(a_G)_x$$

$$4(a_G)_x = -\alpha\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ } (5)$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y$$

$$T\ \text{sen}30° - 16.1 = 0.5(a_G)_y$$

$$0.5T - 16.1 = 0.5(a_G)_y$$

De (4)

$$0.25\alpha - 16.1 = 0.5(a_G)_y$$

$$(a_G)_y = 0.5\alpha - 32.2 \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ } (6)$$

Sustituyendo (5) y (6) en (3)

$$0.5\alpha - 32.2 = -1.5\alpha + \left(-\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{3}$$

$$0.5\alpha - 32.2 = -3\alpha$$

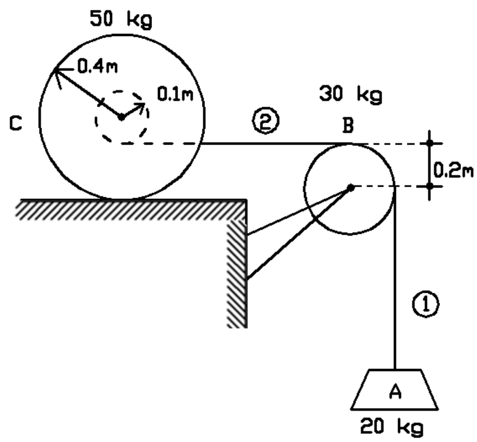
$$3.5\alpha = 32.2$$

$$\boxed{\alpha = 9.2\ \text{rad}/\text{s}^2}$$

De (4)

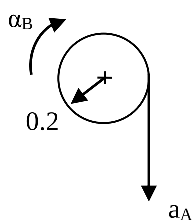
$$\boxed{T = 4.6\ \text{lb}}$$

14. Los tres cuerpos de la figura están conectados mediante una cuerda flexible, inextensible y de peso despreciable. *A* pesa 20 kg. La polea *B* es un cilindro macizo de 0.2 m de radio que pesa 30 kg. Y *C* es un carrete de 50 kg cuyo radio exterior es de 0.4 m y cuyo núcleo es de 0.1 m. Sabiendo que el carrete rueda sin deslizar y que el radio de giro de su masa respecto al eje de figura es de 0.25 m, determine la tensión en cada uno de los tramos de la cuerda (1 y 2) y la aceleración angular del carrete.



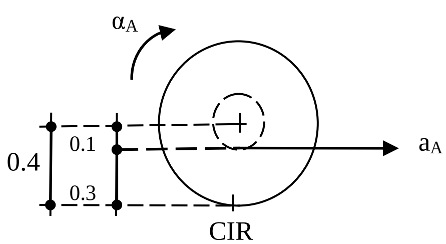
Resolución

Comenzaremos estableciendo las relaciones cinemá- en cuenta que A se mueve con traslación pura; B, con rotación pura baricéntrica, y C con movimiento plano general. La aceleración de la cuerda es igual a la de A.



$$a_A = \alpha_B r_B = 0.2\alpha_B$$

$$a_A = \alpha_C r = 0.3\alpha_C \qquad \text{(1)}$$



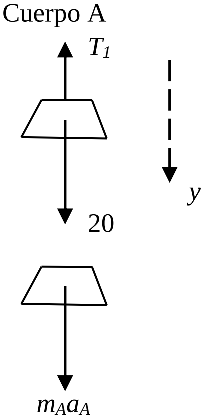
Por tanto

$$0.2\alpha_B = 0.3\alpha_C$$

$$\alpha_B = 1.5\alpha_C \qquad \text{(2)}$$

Dibujamos los diagramas de cuerpo libre de cada cuerpo y un diagrama auxiliar que muestre el sistema resultante.

Cuerpo A



Cuerpo A

$$\sum F_y = ma$$

$$20 - T_1 = \frac{20}{g} a_A$$

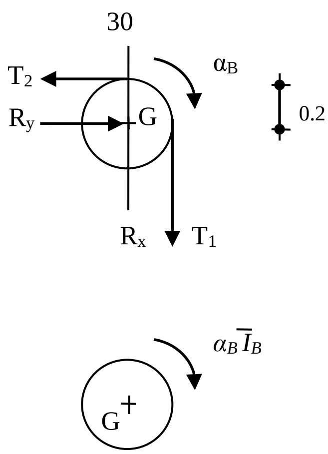
$$T_1 = 20 - \frac{20}{g} a_A$$

De (1)

$$T_1 = 20 - \frac{20}{g}(0.3\alpha_C)$$

$$T_1 = 20 - \frac{6}{g}\alpha_C \qquad \text{(3)}$$

Polea B



Polea B

$$\sum M_G F = \alpha \bar{I}$$

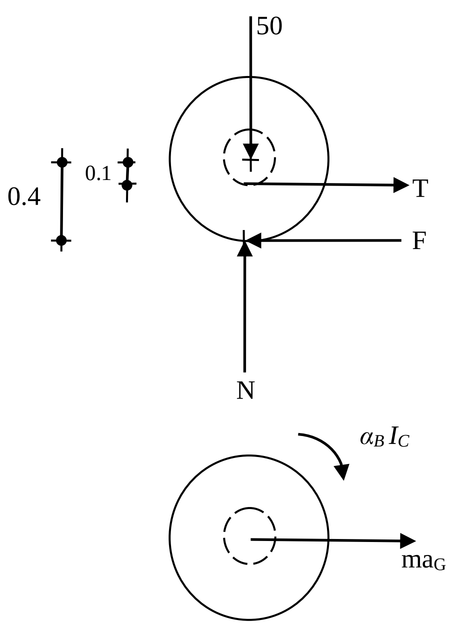
$$0.2T_1 - 0.2T_2 = \alpha_B\left[\frac{1}{2}\left(\frac{30}{g}\right)0.2^2\right]$$

$$T_1 - T_2 = \frac{3}{g}\alpha_B$$

De (2)

$$T_1 - T_2 = \frac{4.5}{g}\alpha_C \qquad \text{(4)}$$

Carrete C



Cuerpo C

Como el punto de contacto entre el carrete y la superficie es el centro instantáneo de rotación

$$\sum M_{CIR} F = \alpha \; I_{CIR}$$

$$0.3T_2 = \alpha_C(\bar{I} + m\bar{r}^2)$$

$$0.3T_2 = \alpha_C\left[0.25^2\left(\frac{50}{g}\right) + \left(\frac{50}{g}\right)0.4^2\right]$$

$$0.3T_2 = \frac{11.125}{g}\alpha_C$$

$$T_2 = \frac{37.08}{g}\alpha_C \qquad \text{(5)}$$

Sustituyendo (3) y (5) en (4)

$$20-\frac{6}{g}\alpha_C-\frac{37.08}{g}\alpha_C=\frac{4.5}{g}\alpha_C$$

$$\frac{47.58}{g}\alpha_C=20$$

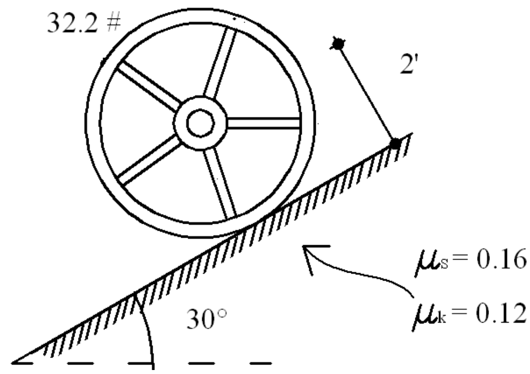
$$\alpha_C=\frac{20(9.81)}{47.58}$$

$$\boxed{\alpha_C=4.124\ \mathrm{rad}/\mathrm{s}^2}$$

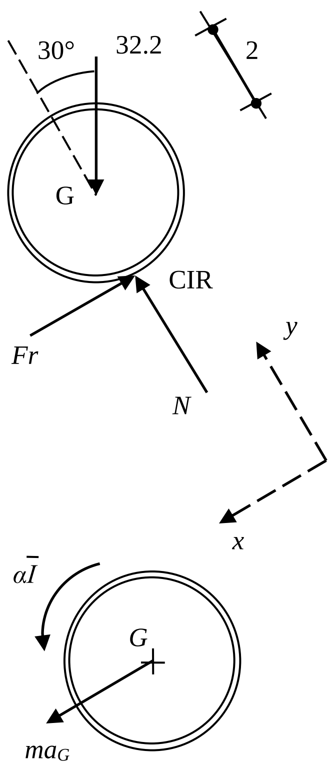
En (3) y (5)

$$\boxed{\begin{aligned}T_1&=17.48\ \mathrm{kg}\\ T_2&=15.59\ \mathrm{kg}\end{aligned}}$$

15. Una rueda de 2 ft de radio y 32.2 lb de peso, cuyo masa tiene una radio de giro centroidal de 1.5 ft, se suelta sobre un plano inclinado con un ángulo de 30º con la horizontal, como se muestra en la figura. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre la rueda y el plano son 0.16 y 0.12, respectivamente. Diga si la rueda se desliza o no sobre el plano y calcule la fuerza de fricción que éste ejerce sobre ella, la aceleración angular de la rueda y la aceleración lineal de su centro de masa.



Resolución



Supondremos, primero, que la rueda no se desliza sobre el plano. En este caso, el punto de contacto entre ellos es el centro instantáneo de rotación.

$$\sum M_{CIR}F = \alpha I_{CIR}$$

$$32.2 = \alpha\left[\bar{I} + mr^2\right]$$

$$32.2 = \alpha\left[1.5^2\left(\frac{32.2}{32.2}\right) + \left(\frac{32.2}{32.2}\right)2^2\right]$$

$$\alpha = \frac{32.2}{6.25}$$

$$\alpha = 5.15$$

Por tanto

$$a_G = \alpha r = 5.15(2) = 10.30$$

$$\sum F_x = ma_G$$

$$32.2\left(\frac{1}{2}\right) - F_r = (1)\ 10.30$$

$$F_r = 16.1 - 10.30 = 5.80$$

$$\sum F_y = 0$$

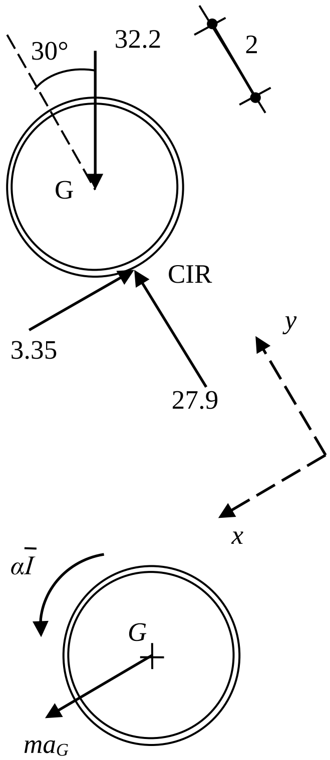
$$N - 32.2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$N = 27.9$$

La fuerza de fricción estática máxima es:

$$F' = M_k N = 0.16(27.9) = 4.46$$

Como 4.46 lb es menor que 5.80 lb, la rueda se desliza sobre el plano.



Puesto que la rueda desliza, la fricción es cinética

$$F_k = M_k N = 0.12(27.9)$$

$$\boxed{F_k = 3.35\ lb \quad 30°}$$

El diagrama de cuerpo libre es el que se muestra:

$$\sum M_G F = \alpha \bar{I}$$

$$3.35(2) = \alpha\left[1.5^2(1)\right]$$

$$\boxed{\alpha = 2.97\ \text{rad}/\text{s}^2}$$

$$\sum F_x = ma_G$$

$$32.2\left(\frac{1}{2}\right) - 3.35 = (1)a_G$$

$$\boxed{a_G = 12.75\ \text{ft}/\text{s}^2 \quad 30°}$$